加拿大 CRUX 杂志问题 4711-4720

2022-02-25 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_82f1808ce54c11e1

1. $\triangle ABC$ 的内心为 I，三个旁心分别为 I_A、I_B、I_C. 求证：四点系 $\{I, I_A, I_B, I_C\}$ 的质心为 $\triangle ABC$ 的外心.

(Sergey Sadov 供题)

1. 设 n 为正整数，对任意 $z \in \mathbb{C} - \{1, 2, \cdots, n\}$，设

$$U_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - z},$$

$$V_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{k}{(k-z)^2}$$

求比值 $\dfrac{U_n(z)}{V_n(z)}$ 的闭式表达式.

(Michel Bataille 供题)

1. 设 x，y 为不同的正实数. 求证：若存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ 满足对任意 $n \geq n_1$，都有 $[nx]$ 能够整除 $[ny]$，则 x 和 y 均为整数. （$[a]$ 表示实数 a 的整数部分）

(András Szilárd 供题)

1. 设 $0 < a < b$，定义在 $[a, b]$ 上的二阶可微函数 f 在 $[0, +\infty)$ 递增且上凸. 求证：若 $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots x_n \leq b$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} + x_i} \geq 0$$

其中 $x_{n+1} = x_1$，且 $n \geq 3$.

(András Szilárd 供题)

1. (1)A 为一个 3×3 的矩阵，且其所有元素均为单位圆上的复数，满足 $\det(A) = 0$. 问：A 是否一定有两行或两列成比例?
(2) 若 A 为 4×4 的矩阵，情况如何?

(George Stoica 供题)

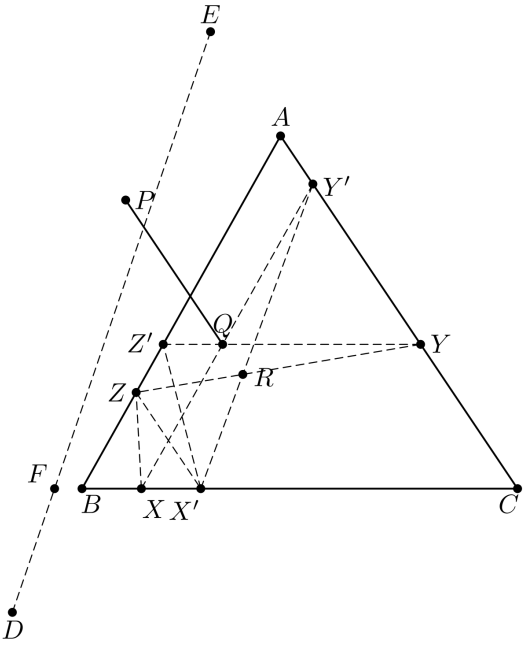
1. 方程 $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$ 的三个根分别为一个三角形三边的斜率. 求这个三角形的欧拉线的斜率.

(Michael Friday 供题)

1. 计算以下积分：
$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^4y^3z^2}{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-(x^3+y^3+z^3)}dxdydz$$

(Toyesh Sharma 供题)

1. X、Y、Z 分别为三角形 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上任意一点. 过点 X 作 AB 的平行线交 CA 于点 Y'；过点 Y 作 BC 的平行线交 AB 于点 Z'；过点 Z 作 CA 的平行线交 BC 于点 X'. 设 A、B、C、X、Y、Z 为不同的六点. 求证：
(1) 若 $X'Y$ 和 AB 交于点 D，$Z'X$ 和 CA 交于点 E，$Y'Z$ 和 BC 交于点 F，则 D、E、F 三点共线；
(2) 若 XZ 和 $X'Z'$ 交于点 P，XY' 和 YZ' 交于点 Q，YZ 和 $X'Y'$ 交于点 R，则 P、Q、R 三点共线；



(Pericles Papadopoulos 供题)

1. 给定三角形 $\triangle ABC$ 及其外接圆 O. P_1 为直线 CA 上任意一点，定义如下点：
过 P_1 作 OA 的垂线和 AB 交于点 P_2；
过 P_2 作 OB 的垂线和 BC 交于点 P_3；
过 P_3 作 OC 的垂线和 CA 交于点 P_4；
过 P_4 作 OA 的垂线和 AB 交于点 P_5；
过 P_5 作 OB 的垂线和 BC 交于点 P_6.
求证：P_6P_1 和 OC 垂直.

(Neculai Stanciu 供题，Editorial Board 修改)

1. 正实数 a，b，c 满足 $a^2+b^2+c^2=12$. 求证：

$$\frac{a^4}{\sqrt{a^3+1}}+\frac{b^4}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{c^4}{\sqrt{c^3+1}}\geq 16$$

(George Apostolopoulos 供题)