一道 USAMO 代数题的解答

2021-04-17 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_83ac56733ee76242

题目 $n \geq 4$ 为正整数. 求如下 $2n$ 元方程组的所有正实数解:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{a_2}, & a_2 &= a_1 + a_3,\\
a_3 &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}, & a_4 &= a_3 + a_5,\\
a_5 &= \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6}, & a_6 &= a_5 + a_7\\
&\vdots & &\vdots\\
a_{2n-1} &= \frac{1}{a_{2n-2}} + \frac{1}{a_{2n}}, & a_{2n} &= a_{2n-1} + a_1
\end{aligned}$$

(2021 年 USAMO 第二天第 2 题)

解答（PDF 中已展开）

解答注意到

$$\begin{aligned}
a_{2k-1}^2 =& \frac{a_{2k-1}}{a_{2k-2}} + \frac{a_{2k-1}}{a_{2k}}\\
=& \frac{a_{2k-1}}{a_{2k-3} + a_{2k-1}} + \frac{a_{2k-1}}{a_{2k-1} + a_{2k+1}}
\end{aligned}$$

这里的下标按模 $2n$ 理解.

于是

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}^2 = n$$

由 Cauchy 不等式:

$$\begin{aligned}
n\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}^2 =& n^2\\
\leq& \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{a_{2k}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{2k}}{2}\\
=& \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}\\
\leq& n\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}^2
\end{aligned}$$

于是该不等式恰好取得等号, 由 Cauchy 不等式取等条件得:

$$a_1 = a_3 = \cdots = a_{2n-1}$$

$$a_2 = a_4 = \cdots = a_{2n}$$

代入条件得:

$$a_1 = a_3 = \cdots = a_{2n-1} = 1$$

$$a_2 = a_4 = \cdots = a_{2n} = 2$$