一分钟做不等式系列（13）——2026 年韩国冬令营模拟测试

2026-01-26　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_83e85eea389145ca

34 (2026 年韩国冬令营模拟测试). 实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2026}$ 满足 $1 \le x_k \le 2$. 求 $f = \dfrac{\sum_{k=1}^{2026} x_k x_{k+1}}{\sum_{k=1}^{2026} x_k^2}$ 的最小值.

解 记 $n = 2026$，并设 $S = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

由 $(x_k - 1)(x_k - 2) \le 0$ 得 $x_k^2 \le 3x_k - 2$，求和得:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \le 3S - 2n.$$

由 $4(x_k-1)(x_{k+1}-1)+(x_k-2)(x_{k+1}-2) \ge 0$ 得 $5x_kx_{k+1} \ge 6(x_k+x_{k+1})-8$，求和得:

$$5\sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1} \ge 12S - 8n.$$

于是 $f \ge \dfrac{\frac{1}{5}(12S - 8n)}{3S - 2n} = \dfrac{4}{5}$.

取 $x_1 = x_3 = \cdots = x_{2025} = 1$，$x_2 = x_4 = \cdots = x_{2026} = 2$ 得，$f = \dfrac{4}{5}$，故 f 的最小值为 $\dfrac{4}{5}$.

注:

1. 非常简单的问题，非常经典的操作。
2. 本题的 2026 可以改为一般的偶数 n，奇数情况稍复杂一些，读者可以自己作为练习。
3. 最近发现微信公众号推送机制又改变了，我已经 2 个月没有在公众号消息界面看到公众号更新了，反而是经常被推送很多没有关注的公众号。以后随缘更新，大家随缘刷到吧。希望第一时间收到更新推送的读者朋友可以试试星标一下公众号。