2024 年北京高考压轴题分析

2024-06-09 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_843e7040b162aac8

今年北京高考数学试卷最后一题如下（第三问回忆版，这里对部分字母做了修改）：

设集合 $M=\{(i,j,k,l)\mid i\in\{1,2\},j\in\{3,4\},k\in\{5,6\},l\in\{7,8\},2\mid i+j+k+l\}$.

对给定正整数数列 A：$\{a_n\},1\leq n\leq 8$，和序列 Ω：$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_s$，其中 $\omega_t=(i_t,j_t,k_t,l_t)\in M,1\leq t\leq s$.

定义变换 T：将数列 A 的第 i_1,j_1,k_1,l_1 项加 1，得到数列 $T_1(A)$；将数列 $T_1(A)$ 的第 i_2,j_2,k_2,l_2 项加 1，得到数列 $T_2T_1(A)$；……重复上述操作，得到数列 $T_s\cdots T_2T_1(A)$，记为 $\Omega(A)$.

若 $a_1+a_3+a_5+a_7$ 为偶数，求证：“存在 Ω，使得 $\Omega(A)$ 为常数列” 当且仅当 “$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$.

分析：

$\Longrightarrow$：只需注意到每次变换是将 a_{2n-1} 和 a_{2n} 中一个数加 1，故 $(a_{2m-1}+a_{2m})-(a_{2n-1}+a_{2n})$ 为定值. 而最后 $\Omega(A)$ 为常数列，即所有的 $a_{2n-1}+a_{2n}$ 都相等，于是变换前也相等，即 $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$

$\Longleftarrow$：即构造一个满足题意的序列 Ω. 为方便叙述，将 Ω 写成一个 $s\times 4$ 的矩阵

$$\begin{pmatrix} i_1 & j_1 & k_1 & l_1\\ i_2 & j_2 & k_2 & l_2\\ & \cdots & \cdots & \\ i_s & j_s & k_s & l_s \end{pmatrix}$$

尝试进行构造：

为使 a_1 和 a_2 在变换后相等，我们很自然地希望第一列中有 a_2 个 1 和 a_1 个 2，这样 $(a_1,a_2)\to(a_1+a_2,a_1+a_2)$. 同理第二列中有 a_4 个 3 和 a_3 个 4，依次类推.

然而，上面的 Ω 不一定满足 “$i_t+j_t+k_t+k_t$ 为偶数” 这一条件，下面我们对和为奇数的行进行调整.

首先，由题意知，$a_1+a_3+a_5+a_7$ 为偶数，而 $a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$，于是 $a_2+a_4+a_6+a_8$ 也为偶数，这样矩阵中所有元素之和也为偶数. 因此元素和为奇数的行共有偶数个.

对两个元素和为奇数的行 (i_m,j_m,k_m,l_m) 和 (i_n,j_n,k_n,l_n)，如果 i_m 和 i_n 的奇偶性不同（即 $i_m\neq i_n$），则交换 i_m 和 i_n 的位置，这样这两行的元素和均变为偶数，且不改变最终的和. j,k,l 的情况也同理.

此时元素和为奇数的行已被调整至全部相同，且一共有偶数行，设共有 $2p$ 行，它们均为 (i_0,j_0,k_0,l_0).

这时候无法再通过交换同一列的两个元素来进行调整，因此我们再添加一些行：

添加 p 行 $(i_0,j_0,11-k_0,15-l_0)$（即前两个数不变，后两个数改变），和 p 行 $(3-i_0,7-j_0,k_0,l_0)$，

这些行的元素和也为奇数.

将 p 行 $(i_0, j_0, 11-k_0, 15-l_0)$ 中的 $11-k_0$ 与 (i_0, j_0, k_0, l_0) 中的 k_0 交换; p 行 $(3-i_0, 7-j_0, k_0, l_0)$ 中的 $3-i_0$ 与 (i_0, j_0, k_0, l_0) 中的 i_0 交换.

此时矩阵中所有行的元素和均为偶数，满足题意. 且第 t 列中恰有 $a_{2t}+p$ 个 $2t-1$ 和 $a_{2t-1}+p$ 个 $2t$.

将这个矩阵对应的 Ω 作用于 A，可得 $\Omega(A)$ 中都每一项均为 a_1+a_2+p，证毕.