用向量外积证明九省联考第 18 题中的面积结论

2024-01-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_847b84c8c78b0ec5

这次九省联考的第 18 题 (2)，可以转化面积后快速做出，核心在于证明三角形 GMN 面积为四边形 $ADBE$ 面积的 $\frac{1}{4}$.

这里用向量外积给出一个简洁且本质的证明.

首先简单回顾一下向量外积的定义和性质：

对向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，定义它们的外积 $\vec{a} \times \vec{b}$ 如下：

- 大小：

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin < \vec{a}, \vec{b} >$$

(于是 $|\vec{a} \times \vec{b}|$ 可以表示由 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所张成的平行四边形面积，也是它们所张成的三角形面积的 2 倍.)

- 方向：

$\vec{a} \times \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 均垂直，且遵循右手定则.

(于是 $\vec{a} \times \vec{b}$ 和 $\vec{b} \times \vec{a}$ 大小相同，方向相反，为相反向量.)

- 分配律：

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

有了上面的基本知识，我们就可以进行证明了：

> 在四边形 $ADBE$ 中，M, N 分别为 AB, DE 的中点，G 为 BD 和 EA 的交点，则 $S_{\triangle GMN} = \frac{1}{4} S_{ADBE}$.

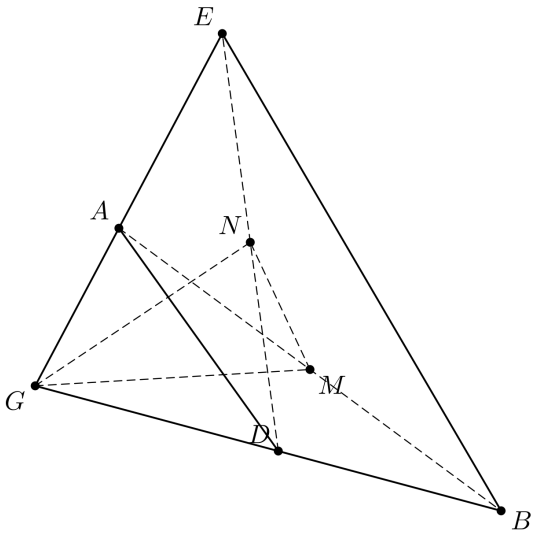

图 1: （上课讲这题时画的图）

证明：

$$
\begin{aligned}
& S_{\triangle GMN} \\
=& \frac{1}{2}|\overrightarrow{GM} \times \overrightarrow{GN}| \\
=& \frac{1}{8}\left|(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}) \times (\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE})\right| \\
=& \frac{1}{8}\left|\overrightarrow{GA} \times \overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA} \times \overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GB} \times \overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB} \times \overrightarrow{GE}\right| \\
=& \frac{1}{8}\left|\overrightarrow{GA} \times \overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB} \times \overrightarrow{GE}\right| \\
=& \frac{1}{8}\left||\overrightarrow{GB} \times \overrightarrow{GE}|-|\overrightarrow{GA} \times \overrightarrow{GD}|\right| \\
=& \frac{1}{4}\left|S_{\triangle GBE}-S_{\triangle GAD}\right| \\
=& \frac{1}{4} S_{ADBE}
\end{aligned}
$$

公众号创作者有一些定制微信红包封面额度可以发放，随便用照片做了一个封面进行尝试。如果大家有适合做红包封面且和数学有关的图片欢迎在后台发给我，我再来做几个发放。