2025 年巴尔干地区数学奥林匹克预选题

2026-05-08 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_87aa695f8dc3b10e

代数

1. 求所有实系数多项式 $P(x)$，使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，均满足

   $P^2(x) + P^2(y) + P^2(x+y) = 2P(x^2 + xy + y^2)$

2. 求所有正整数 n，使得对任意 $x > 0$，不等式 $x^n + 2x + 1 \geq 4x^2$ 恒成立.

3. 设 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 为非常数函数. 证明：存在 $a, b \in \mathbb{R}^+$，使得 $f(a) + f(b) > 2f(\sqrt{ab})$.

4. 证明：对任意 $a, b, c > 0$，不等式

   $\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)^3 + \left(\frac{b^2+c^2}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{c^2+a^2}{c+a}\right)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3$

   恒成立.

   求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，均满足

   $f(x + yf(x)) + y = xy + f(x+y)$

   设正实数 a, b, c 满足 $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b = 1$，证明：

   $\frac{ab+bc+ca}{1+2abc} \leq \frac{(a+b+c)^2}{4}$

   设 x_1, x_2, x_3, x_4 为正实数，证明：

   $\frac{x_1+3x_2}{x_2+x_3} + \frac{x_2+3x_3}{x_3+x_4} + \frac{x_3+3x_4}{x_4+x_1} + \frac{x_4+3x_1}{x_1+x_2} \geq 8$

组合

1. 给定一张 m 行 22 列的方格表格，每个方格填入集合 $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2025\}$ 中的一个数（允许重复）. 要求：对集合 A 中任意一对互不相同的数，都存在某一行恰好包含其中一个数. 求正整数 m 的最小值.

2. 若一个图的边可以用两种颜色染色，且图中不存在包含两条连续同色边的圈，则称该图为好图. 求具有 1000 个顶点的好图的最大边数.

3. 一只兔子位于欧几里得平面内点 (x, y) 处，平面内分布若干个地雷（可以有无穷多个），每个地雷为任意半径的圆盘. 任意两个地雷至多有一个公共切点，无其他交点. 兔子每次跳跃的距离严格等于 1，且不能落入任意地雷的内部（可以落在地雷边界上）. 已知兔子与坐标原点均不在任何地雷内部，求最小的实数 ϵ，使得无论地雷如何布设，兔子总能到达与原点距离不超过 ϵ 的位置.

4. 某社交网络共有 2025 名用户，任意两名不同用户要么互为好友，要么互不为好友．若一名用户没有任何好友，则称其为孤独用户．初始状态下，网络中不存在孤独用户，且用户 Alice 与 Bob 互不为好友．定义好友反转操作：一名用户将自身所有好友关系全部取反，原有好友变为非好友，原有非好友变为好友．证明：可以将 2025 名用户排成一个序列，按序列顺序依次对每名用户执行好友反转操作，且操作全过程中始终不存在孤独用户．

5. 设 n,m 为正整数且 $n\geq 2$．共有 n 堆石子，各堆石子数量依次为 $a_1,a_2,\ldots,a_n$，满足对任意 $1\leq i\leq n$，有 $m\leq a_i\leq m\cdot i$（由此可得 $a_1=m$）．Aida 与 Bob 进行如下游戏：每一轮 Bob 任选两堆非空石子，从石子数量较少的一堆中取走若干石子；若两堆石子数量相等，则任选其中一堆取子．随后 Aida 做出二选一决策：要么从另一堆中取走相同数量的石子，要么将 Bob 刚取走的石子全部移至另一堆中．当场上至多仅剩一堆非空石子时游戏结束．求最小的正整数 k，使得无论初始石子数量如何、无论 Bob 如何操作，Aida 都能保证游戏过程中某一时刻全场石子总数不超过 k．

6. 某国有 n 座城市（$n\geq 100$，n 为整数），部分城市之间设有双向直飞航线．对任意两座城市 A,B 给出如下定义：(i)A 到 B 的路径：由两两不同城市构成的序列 $A=C_0,C_1,\ldots,C_{k+1}=B$（$k\geq 0$），满足对任意 $0\leq i\leq k$，C_i 与 C_{i+1} 之间有直飞航线；(ii)A 到 B 的最长路径：一条 A 到 B 的路径，且不存在其他 A 到 B 的路径包含更多顶点；(iii)A 到 B 的最短路径：一条 A 到 B 的路径，且不存在其他 A 到 B 的路径包含更少顶点．已知该国任意两座城市 A,B，都存在一条最长路径与一条最短路径，两条路径除端点 A,B 外无其他公共顶点．记 F 为该国所有直飞航线对应的城市对数量，求 F 关于 n 的所有可能取值．

几何

1. 设 $\triangle ABC$ 满足 $AB<AC$，点 D 在边 AC 上，且 $AD=\dfrac{AC-AB}{2}$．过点 A 作直线 $l\parallel BC$，在直线 l 上取点 X,Y 满足 $BX=CY$，且直线 AC 与 $\triangle XDY$ 的外接圆相切．证明：$\triangle XDY$ 的外接圆在点 X,Y 处的两条切线交于直线 BC 上．

2. 设 $\triangle ABC$ 满足 $\angle BAC=2\angle CBA$ 且 $AB<AC$，点 P 在线段 AC 上且 $PC=AB+AP$．设 O 为 $\triangle ABP$ 的外心，过点 O 作 AB 的平行线交 BP 于点 Q．证明：直线 AQ 经过线段 BC 的中点．

3. 设锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，D 为边 BC 上任意一点．点 E,F 分别在线段 AB,AC 上，满足 A,B,D,F 四点共圆，A,C,D,E 四点共圆．设 BF 与 CE 交于点 P，点 L 在射线 HA 上，且直线 LC 与 $\triangle PBC$ 的外接圆相切于点 C．设 BH 与 CP 交于点 X，证明：D,X,L 三点共线．

4. 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，点 D 在 $\triangle ABC$ 不含顶点 C 的弧 $\widehat{AB}$ 上任取一点．设 I_A,I_B 分别为 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ACD$ 的内心，直线 DI_A 与 II_B 交于点 X_A，直线 DI_B 与 II_A 交于点 X_B．证明：直线 X_AX_B 与 I_AI_B 的交点落在一条与点 D 位置无关的定直线上．

5. 设凸四边形 $ABCD$ 满足 $AB^2+BC^2=AD^2+CD^2$，取点 X,Y 使得 $XD\perp CD$、$XB\perp AB$、$YB\perp BC$、$YD\perp AD$．设直线 AC 与直线 XY 交于点 T，M 为线段 XY 的中点，证明：

T, M, B, D 四点共圆.

6. 设锐角 $\triangle ABC$ 内接于以 O 为圆心的圆 ω_1，且 $AB < AC$. 记 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，M 为边 BC 的中点，ω_2 为 $\triangle BHC$ 的外接圆. 设直线 HO 与圆 ω_2 交于异于 H 的点 K，直线 MK 与圆 ω_2 交于异于 K 的点 P. 证明：圆 ω_1 在点 A 处的切线与圆 ω_2 在点 P 处的切线，两线交点落在 $\triangle APK$ 的外接圆上.

数论

1. 设 k 为正整数，$n_1, n_2, \ldots, n_k$ 是 k 个大于 1 的互不相同整数，且存在正整数 a 使得 $n_1! + n_2! + \cdots + n_k! = a^{n_k}$. 证明：$n_1, n_2, \ldots, n_k$ 中至少有一个为质数.

2. 若存在 $1, 2, \ldots, n$ 的一个排列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，满足如下两个条件：(i) 对任意 $1 \le i \le n-1$，a_i 与 a_{i+1} 奇偶性不同；(ii) 对任意 $1 \le k \le n$，部分和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 是模 n 的二次剩余. 则称整数 $n > 1$ 为好数. 证明：存在无穷多个好数，同时也存在无穷多个不是好数的正整数.

3. 给定正整数 k，若正整数数对 (a, b) 满足 $a \mid b^k + 1$ 且 $b \mid a^k + 1$，则称 (a, b) 为一组 $k-$ 好对. 求所有正整数 k，使得存在无穷多组 $k-$ 好对.

4. 设 a, b, k 为正整数，若对任意整数 $n \ge 2025$，总存在正整数 $x_n > n$，使得 $x_n \mid n^2 + a$ 且 $x_n + k \mid n^2 + b$. 证明：$k = b - a$.

5. 设 $k > 2$ 为给定正整数，求所有正整数 d，使得存在整系数多项式 $P(x)$ 满足 $\deg P(x) = d$，且对任意正整数 $n > k$，均有 $11^k \mid 2025^n + P(n)$.

6. 求所有整系数多项式 $P(x)$，使得存在正整数 N，对任意正整数 $n > N$，都有 $P(n) > 0$ 且 $n + P(n) \mid n^{P(n)} + P(n)^n$.