Mathematical Reflections 2022 年第五期征解题

2022-09-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_88b168963be6482c

Junior Problems

J601. 实数 a，b，c，d 满足 $7>a\geq b+1\geq c+3\geq d+4$. 求证:

$$\frac{1}{7-a}+\frac{4}{6-b}+\frac{9}{4-c}+\frac{16}{3-d}\geq a+b+c+d$$

J602. 求证：对任意正实数 x，都有

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq\sqrt{1+\frac{1}{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

并说明等号成立条件.

J603. $\triangle ABC$ 的重心为 G. M、N、P、Q 分别为线段 AB、BC、CA、AG 的中点. 求证：若

$$\sin(A-B)\sin C=\sin(C-A)\sin B$$

则 M、N、P、Q 四点共圆.

J604. 奇正数 m，n，p 满足 $(m-n)(n-p)(p-m)=0$ 且

$$\frac{7}{m}+\frac{8}{n}+\frac{9}{p}=2$$

求 mnp 的最小值.

J605. 求证:

(1) 对任意 $\triangle ABC$,

$$\frac{m_a^2}{bc}+\frac{m_b^2}{ca}+\frac{m_c^2}{ab}\geq 2+\frac{r}{2R}$$

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则

$$\frac{m_a^2}{b^2+c^2}+\frac{m_b^2}{c^2+a^2}+\frac{m_c^2}{a^2+b^2}\leq 1+\frac{r}{4R}$$

J606. 设实数 a，b，$c\in[0,1]$. 求证:

$$2\leq\frac{b+c}{1+a}+\frac{c+a}{1+b}+\frac{a+b}{1+c}+2(1-a)(1-b)(1-c)\leq 3$$

Senior Problems

S601. 在整数范围内解方程：

$$16x^2y^2\left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)+4\left(x^4+y^4+x^2-y^2\right)=2023^2-1$$

S602. 对任意整数 $n>1$，设

$$A=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

比较 A 和 B 的大小.

S603. $\triangle ABC$ 的内心为 I，重心为 G. 直线 AG 交 BC 于点 E，直线 AI 交 BC 于点 D，交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 M. 点 P 为 E 在 AM 上的射影. 求证：若 $(AB+AC)^2=16AP\cdot DM$，则 GI 平行于 BC.

S604. 实数 $-1\leq x,y,z\leq 1$，且 $x+y+z+xyz=0$. 求证：

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\leq\sqrt{9+xyz}$$

S605. 锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 O，外接圆半径为 R. 设 $\triangle OBC$、$\triangle OCA$、$\triangle OAB$ 的外接圆半径分别为 R_a、R_b、R_c. 求证：$\triangle ABC$ 为等边三角形当且仅当

$$R^3+R^2\left(R_a+R_b+R_c\right)=4R_aR_bR_c$$

S606. 设 a，b，c 为正实数. 求证：

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+abc\geq a+b+c+1$$

Undergraduate Problems

U601. 实数 a，b，c，d 满足多项式 $P(x)=x^5-10x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 的所有根均大于 1. 求 $a+b+c+d$ 的最小值.

U602. 设 a，$b>0$. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n\frac{x^n}{\sqrt{ax^{2n}+b}}\,\mathrm{d}x$$

U603. 求所有函数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，满足以下条件：

(1) 对任意 x，$y\in\mathbb{R}$，$f(x+1)f(y)-f(xy)=(2x+1)f(y)$.

(2) 对任意 $x\geq 2$，$f(x)>2x$.

U604. 若

$$f(m)=\int_0^1 \frac{(x^m-1)\ln(1+x)}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$$

求

$$\lim_{m\to 0}\left(\frac{2\pi^2}{9m}-\frac{8f(m)}{3m^2}\right)$$

U605. 非零复数 a，b，c 的模长相等，且满足

$$a^3+b^3+c^3=rabc$$

其中 r 为实数.

(1) 求证：$-1\le r\le 3$.

(2) 求证：若 $r<3$，则 $ax^2+bx+c=0$，$bx^2+cx+a=0$，$cx^2+ax+b=0$ 中有且仅有一个方程有模为 1 的根.

U606. 求所有双射函数 $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意满足 $|m-n|$ 为奇数的正整数 m，n，都有

$$f^{(mn+1)}(m+n)=f(m)f(n)$$

这里 $f^{(k)}$ 表示 k 次迭代 $f\circ f\circ\ldots\circ f$.

Olympiad Problems

O601. 求所有整数 n，使得 $(n+1)^2+(2n+1)^2$ 为完全平方数.

O602. 正实数 a，b，c，d 满足

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}=1$$

求证：

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd+6\ge 5(a+b+c+d)$$

O603. 求所有三元非负整数组 (x,y,z) 使得

$$x^2-y^2=2^z+2022$$

O604. 设整数 $n>2$. 对 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意一个非空子集 $A=\{a_1,\cdots,a_k\}$，设 m_A 为 A 中所有元素的算术平均值. 在两个不同集合 A 和 B 取遍 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有非空子集时，求 $|m_A-m_B|$ 的最小值.

O605. a，b，c 为正实数，x，y，z 为实数. 求证：

$$\frac{abxy}{a+b+2c}+\frac{bcyz}{b+c+2a}+\frac{cazx}{c+a+2b}\leq\frac{1}{4}\left(ax^2+by^2+cz^2\right)$$

O606. 求证：任意连续六个正整数的乘积不为整数的五次方.