一道 IMOC 不等式及加强的证明

2021-08-29　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_890d121f89d83f6e

2021 年中国台湾 IMOC 代数组第 7 题如下：

（全部试题见：2021 年中国台湾 IMOC 中文翻译（全））

题目： 对任意满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ 的正实数 a，b，c，d，求证：

$$\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+d}+\frac{d^3}{d+a}+4abcd\le 6.$$

解答（PDF 中已展开）

证明： 原不等式等价于：

$$\begin{aligned}&4-\sum_{cyc}\frac{a^3}{a+b}\ge 4abcd-2\\ \iff&\sum_{cyc}\left(a^2-\frac{a^3}{a+b}\right)\ge 4abcd-2\\ \iff&\sum_{cyc}\frac{a^2b}{a+b}\ge 4abcd-2\end{aligned}$$

设 $x=\sum\limits_{cyc}ab\le\sum\limits_{cyc}\dfrac{a^2+b^2}{2}=4$，由

$$\sum_{cyc}\frac{a^2b}{a+b}=\sum_{cyc}\frac{a^2b^2}{ab+b^2}\ge\frac{\left(\sum\limits_{cyc}ab\right)^2}{\sum\limits_{cyc}(ab+b^2)}=\frac{x^2}{4+x}$$

$$4abcd-2\le 4\cdot\frac{(a+c)^2}{4}\cdot\frac{(b+d)^2}{4}-2=\frac{x^2}{4}-2$$

故只需证：

$$\frac{x^2}{4+x}\ge\frac{x^2}{4}-2\iff\frac{(4-x)(x^2+4x+8)}{4(x+4)}\ge 0$$

显然成立.

龚固老师的加强： 求实数 t 的取值范围，对任意满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=4$ 的正实数 a，b，c，d，有

$$\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+d}+\frac{d^3}{d+a}+tabcd\le 2+t.$$

证明： 当 $a=c\to 0$ 时，$\sum\limits_{cyc}\dfrac{a^3}{a+b}\to 4$，可得 $t\ge 2$. 下证 $t\ge 2$ 时，不等式成立.

同上，只需证明：

$$\frac{x^2}{4+x} \geq \frac{t}{16}x^2 - t + 2 = \left(\frac{x^2}{16} - 1\right)t + 2$$

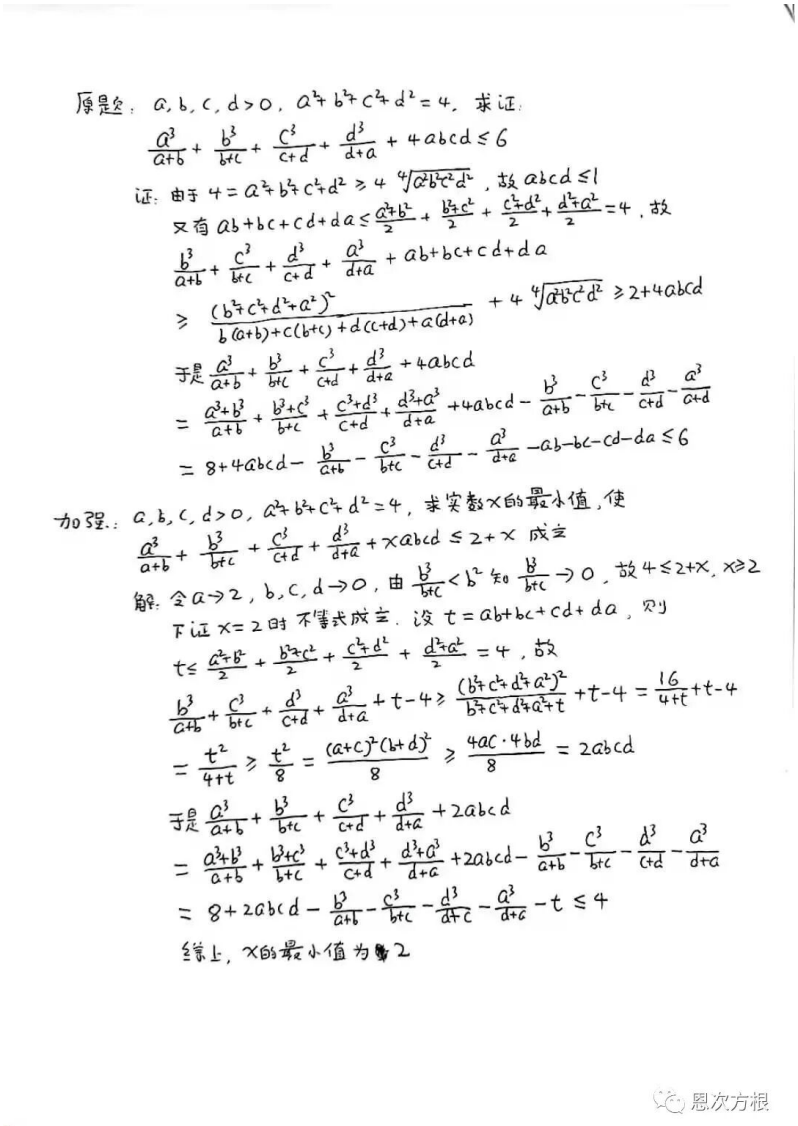
不等式右侧为关于 t 的一次函数，且 $\dfrac{x^2}{16} - 1 \leq 0$，故在 $t = 2$ 时取得最大值.

因此，只需证明：

$$\frac{x^2}{4+x} \geq \frac{2}{16}x^2 - 2 + 2 = \frac{1}{8}x^2$$

这显然成立.

龚固老师的方法如下，非常漂亮！



PDF 版链接及本题思考过程：

原文后半在公众号里是付费内容，导出件没有包含。