一道数论题的两种证法

2021-03-30 原文链接

当前语料正文仅保留原始文章图片；本 PDF 忠实保留该图片，图片内文字不可检索。

1. (2000 年 Putnam 数学竞赛) 已知正整数 m,n 满足 $n \geq m$，求证：$\dfrac{\gcd(m,n)}{n}\binom{n}{m}$ 为整数.

证明 1 由裴蜀定理，存在整数 a,b，使得 $\gcd(m,n)=an+bm$，于是

$$\begin{aligned}\frac{\gcd(m,n)}{n}\binom{n}{m} &= a\binom{n}{m}+\frac{bm}{n}\binom{n}{m}\\ &= a\binom{n}{m}+\frac{bmn!}{nm!(n-m)!}\\ &= a\binom{n}{m}+\frac{b(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}\\ &= a\binom{n}{m}+b\binom{n-1}{m-1}\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

证明 2 n 个白球等间距地摆放在一个圆周上，选取其中 m 个白球染成黑色. 如果一种染色方案经过旋转后与另一种重合，则认为这两种染色方案是等价的. 对于任意一种染色方案，其旋转 n 次（每次一格）后必与自身重合，设其至少旋转 d $(d>0)$ 次后与自身重合，易知 $\dfrac{n}{d}|\gcd(m,n)$. 于是 $\dfrac{n}{\gcd(m,n)}$ 能整除每个等价类中的元素个数 d，从而也能整除染法总数 $\binom{n}{m}$，证毕. 恩次方根