2022 年基辅市数学奥林匹克（第二轮）

2022-02-08　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8c0bf70969e25fc6

相关链接：2022 年基辅市数学奥林匹克（第一轮）——中文翻译

七年级组

1. (1) 是否存在正整数 a 和 d，使得 $[a, a+d]=[a, a+2d]$?
   (2) 是否存在正整数 a 和 d，使得 $[a, a+d]=[a, a+4d]$?
   这里 $[a, b]$ 表示 a 和 b 的最小公倍数.

2. O 点处有一个中央火车站，通过轨道连接到其它火车站 A_1，A_2，$\cdots$，A_8，且长度均为 2. 对任意 $i=1$ 到 8，A_i 和 A_{i+1} 之间也有轨道连接（这里 $A_9=A_1$），且长度均为 1.
   8 列火车 B_1，B_2，$\cdots$，B_8，速度分别为 1，2，$\cdots$，8. 火车只能在上述轨道上双向运行，且转向不耗费时间. 如果两列或多列火车在某个时间点相遇，之后它们将和其中速度最快的火车以相同速度一起行驶.
   是否能将火车放置在车展 A_1，A_2，$\cdots$，A_8（每个车站一列火车），并安排它们的行驶路线，使得所有火车能在 $t<\dfrac{1}{2}$ 的时间内到达中央火车站 O?

3. 在 $\triangle ABC$ 中，中线 BM 的长度为 BC 边长度的一半. 求证：$\angle ABM=\angle BCA+\angle BAC$.

4. Fedir 和 Mykhailo 有三堆石子：第一堆有 100 块，第二堆有 101 块，第三堆有 102 块. 他们进行一个游戏，两人轮流行动，从 Fedir 开始. 在每一次行动中，玩家可以任意选择两堆石子，若它们的剩余石子数分别为 a 和 b，则从每一堆中取出 (a, b) 枚石子. 将某一堆石子全部取完者获胜，问谁有必胜策略?
   这里 (a, b) 表示 a 和 b 的最大公约数.

八年级组

1. 求所有三元数组 (a, b, c)，使得
   $$a+[a, b]=b+[b, c]=c+[c, a]$$
   这里 $[a, b]$ 表示 a 和 b 的最小公倍数.

2. 给定整数 n，k，Monica 和 Bogdan 进行一个游戏. 首先，Monica 写下 k 个正数，如果 Bogdan 能在平面上找到具有如下性质的 n 个点，则 *Bogdan* 获胜：对于 Monica 写下的任意数字 m，存在 Bogdan 选择的两个点，其距离恰好为 m. 否则 Monica 获胜.
   根据 n，k 的取值确定谁有必胜策略.

3. 非零实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 满足以下条件：

$$x_1-\frac{1}{x_2}=x_2-\frac{1}{x_3}=\cdots=x_{n-1}-\frac{1}{x_n}=x_n-\frac{1}{x_1}$$

求所有的 n，使得 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 必须全部相等.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，点 D,E,F 分别在边 BC,CA,AB 上，且满足 $\angle DAB=\angle CBE$，$\angle BEC=\angle AEF$. 求证：$DB=DF$.

九年级组

1. 求所有三元数组 (a,b,c)，使得

$$a+(a,b)=b+(b,c)=c+(c,a)$$

这里 (a,b) 表示 a 和 b 的最大公约数.

2. 2022 个点排列在一个圆周上，其中一个为黑色，其余为白色. 在每次操作中，刺猬可以执行以下操作之一：
(1) 选择两个颜色相同的相邻点，改变它们的颜色（白变黑，黑变白）；
(2) 选择两个颜色不同的相间点（两点之间恰有一个点），改变它们的颜色.
是否能通过上述操作将每个点的颜色均变成和初始颜色相反.

3. 同八年级组第 3 题

4. $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω，内心为 I，K 为 ω 上不含点 B 的弧 AC 上任意一点. 点 P 为点 I 关于点 K 的对称点，ω 上含点 B 的弧 AC 上一点 T 满足 $\angle KCT=\angle PCI$. 求证：$\angle AKC$ 和 $\angle ATC$ 的角平分线交点在直线 CI 上.

十年级组

1. 正实数 x，y，z 满足

$$\frac{xy+1}{x+1}=\frac{yz+1}{y+1}=\frac{zx+1}{z+1}$$

它们是否必须全部相等?

2. 同九年级组第 2 题

3. AH_A，BH_B，CH_C 为 $\triangle ABC$ 的三条高. 求证：若 $\dfrac{H_BC}{AC}=\dfrac{H_CA}{AB}$，则 BC 关于 H_BH_C 的对称直线和 $\triangle H_BH_CA$ 的外接圆相切.

4. 素数 $p>2$，整系数多项式 Q 满足：不存在整数 $1\le i<j\le p-1$ 使得 $(Q(j)-Q(i))(jQ(j)-iQ(i))$ 能被 p 整除. 求 Q 的次数的最小可能值.

十一年级组

1. 同八年级组第 2 题

2. 起初，计算机的内存中包含一个多项式 x^2-1. 每一分钟，计算机从其内存中选择任意多项式 $f(x)$，并向内存中写入 $f(x^2-1)$ 和 $f(x)^2-1$，或者从其内存中选择两个不同多项式 $g(x)$ 和 $h(x)$，并向内存中写入 $\dfrac{g(x)+h(x)}{2}$（在这过程中不会删去任何多项式）. 在某段时间后，计算机的内存中是否可能存在多项式 $P(x)=\dfrac{1}{1024}(x^2-1)^{2048}-1$?

3. 求最大的 k，满足存在 1，2，$\cdots$，2022 的一个排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{2022})$，使得至少有 k 个不同的 $1\leq i\leq 2022$，令 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_i}{1+2+\cdots+i}$ 为大于 1 的整数.

4. $ABCD$ 为圆内接四边形. 平行于 BD 的直线 l 和 $\triangle ABC$、$\triangle CDA$ 的内切圆均相切. 求证：l 经过 $\triangle BCD$ 或 $\triangle DAB$ 的内心.