恒等式与不等式的证明一例

2025-01-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8c1f4f4388e9adeb

下面是一个常见的恒等变形：

$$\begin{aligned} & ab+bc+ca+2abc=1 \\ \iff & \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2 \\ \iff & \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=2 \end{aligned}$$

此外，若 $a,b,c\geq 0$，上式还等价于

$\frac{a(b+c)}{a+1}+\frac{b(c+a)}{b+1}+\frac{c(a+b)}{c+1}=1$

这个恒等变形比较少见，但验证是简单的，在此略去.

2025 年以色列数学奥林匹克的第 6 题就用到了上面的恒等变形：

题 6. 设a、b和c是非负数，且满足$ab+ac+bc+abc=4$. 证明：

$$\sqrt{\frac{ab+ac+1}{a+2}}+\sqrt{\frac{ab+bc+1}{b+2}}+\sqrt{\frac{ac+bc+1}{c+2}}\leq 3.$$

注意到如下恒等式，由 Cauchy 不等式即证：

$\frac{ab+ac+1}{a+2}+\frac{ab+bc+1}{b+2}+\frac{ac+bc+1}{c+2}=3$

注：这种不等式没太大意义，写的原因是后台有读者问到。