利用欧拉分解公式解 RMM 第一题

2023-03-03 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8c20c075bd311127

2023 年罗马尼亚大师赛第一天第 1 题如下：

求所有质数 p 和正整数 x，y，使得

$$x^3+y^3=p(xy+p).$$

看到这题的立方和形式，首先想到的是欧拉分解公式：

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

相关链接：欧拉分解公式的若干应用

我们有

$$\begin{aligned}&x^3+y^3=p(xy+p)\\\iff&x^3+y^3+(\frac{p}{3})^3-3xy\cdot\frac{p}{3}=\frac{p^3}{27}+p^2\\\iff&(3x+3y+p)Q=p^2(p+27)\end{aligned}$$

其中 Q 为一个正整数，形式较为复杂，在这不考虑。

于是我们将不定方程转化为了“乘积 = 乘积”的形式，注意到直接对原式进行分解，也能得到“乘积 = 乘积”的形式，即

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=p(xy+p)$$

这提示我们考虑 p 和 $x+y$ 的关系：

若 $p\mid x+y$，设 $x+y=tp$，则

$$\begin{aligned}&(x+y)(x^2-xy+y^2)\\=&(x+y)(\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2)\\\geq&\frac{1}{4}(x+y)^3\\=&\frac{1}{4}t^3p^3\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&p(xy+p)\\\leq&p(\frac{1}{4}(x+y)^2+p)\\=&\frac{1}{4}p^2(t^2p+4)\end{aligned}$$

于是

$$t^2p+4\geq t^3p$$

若 $t\geq 2$，则 $(t^3-t^2)p\geq 4p>4$，矛盾，故 $t=1$，代回原方程得 $x^2-xy+y^2=xy+p$，即 $p=(x-y)^2$ 为完全平方数，矛盾，于是 $p\nmid x+y$.

又由于 p 为质数，于是 $(3x+3y+p,p^2)=1$，故 $3x+3y+p\mid p+27$.

设 $p+27=k(3x+3y+p)$，即 $(k-1)p=3(9-k(x+y))$. 由 $x+y\geq 2$ 知，$k\leq 4$.

$(1)k=1$ 时，$x+y=9$，枚举得 $\{x,y\}=\{1,8\}$，$p=19$；$\{x,y\}=\{2,7\}$，$p=13$；$\{x,y\}=\{4,5\}$，$p=7$.

$(2)k=2$ 时，$p=3(9-2(x+y))$，于是 $p=3$，$x+y=4$，枚举知矛盾.

$(3)k=3$ 时，$2p=3(9-3(x+y))$，$9\mid p$，矛盾.

$(4)k=4$ 时，$3p=3(9-4(x+y))$，于是 $x+y=2$，$p=1$，矛盾.

综上，一共 6 组解.