2021 年第一届 OJIMC 模拟赛

2021-12-28 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8c2b136312eec6f8

昨天发的 OIMC 的初中版，即 Online Junior International Mathematical Cup.

第一天

1. 求所有函数 f：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对于任意实数 x，y，都有
$$xf(y)+f(x+y)\geq(y+1)f(x)+f(y).$$

2. 称整系数多项式 P 为"i-好" 的，如果 i 和 $P(i)$ 中恰有一个数能被写为两个完全平方数之和. 求证：对于任意正整数 n，存在多项式 P，使得 P 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，都是"i-好" 的. 是否存在多项式，对于任意 $i\in\mathbb{N}$，都是"i-好" 的?

3. Alice 有 n 袋硬币（可能为空），依次标记为 1 到 n. 她进行如下的操作：在第 k 次操作中，她列出所有硬币数严格少于第 k 袋（模 n 意义下）但与第 k 袋硬币数之差严格小于 n 的所有袋子.
如果至少有一个被列出的袋子，Alice 则从每个被列出的袋子中拿出一枚硬币，并全部放入第 k 个袋子中. 否则，从第 k 个袋子中拿出 $n-1$ 枚硬币，分别放入其它袋子中（每个袋子放入一枚）.
如果在某个时间点，Alice 无法继续进行移动，则操作终止. 问 Alice 至多能有多少枚硬币，才能使得无论将它们如何分配到 n 个袋子中，操作都会在有限次内终止?

第二天

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=75^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle C=45^\circ$. 设 N_9 为 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心，M 为 AC 的中点. 求直线 AN_9 和 BM 所夹的锐角的度数.

2. 用 1×2021 的砖块来覆盖一个固定的网格多边形. 求证：无论如何覆盖，左下角顶点的横、纵坐标之和能被 2021 整除的砖块数量为一个常数（由多边形决定）.

3. a，b，c 为正实数，对任意正整数 n，求证：
$$\sum_{cyc}\left(\frac{4a^2+2ab}{3a+3b}\right)^n\geq\sum_{cyc}a^n.$$