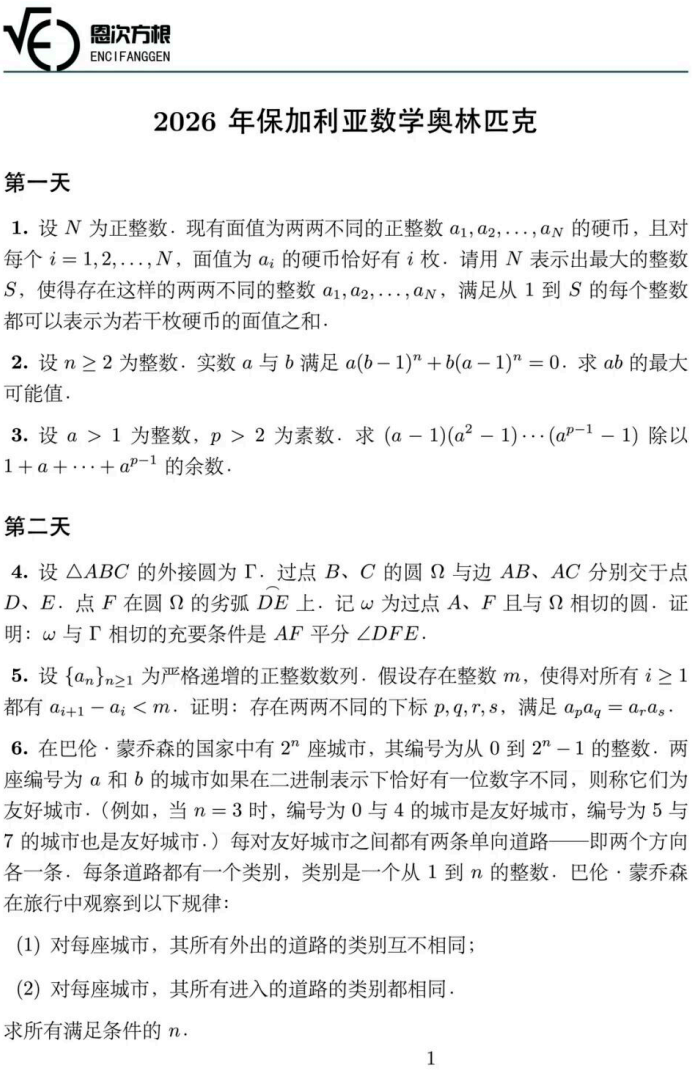
2026 年保加利亚数学奥林匹克

2026-04-07　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8c38c088b3391f30

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。



恩次方根
ENCIFANGGEN

2026 年保加利亚数学奥林匹克

第一天

1. 设 N 为正整数．现有面值为两两不同的正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ 的硬币，且对每个 $i = 1, 2, \ldots, N$，面值为 a_i 的硬币恰好有 i 枚．请用 N 表示出最大的整数 S，使得存在这样的两两不同的整数 $a_1, a_2, \ldots, a_N$，满足从 1 到 S 的每个整数都可以表示为若干枚硬币的面值之和．

2. 设 $n \geq 2$ 为整数．实数 a 与 b 满足 $a(b-1)^n + b(a-1)^n = 0$．求 ab 的最大可能值．

3. 设 $a > 1$ 为整数，$p > 2$ 为素数．求 $(a-1)(a^2-1)\cdots(a^{p-1}-1)$ 除以 $1 + a + \cdots + a^{p-1}$ 的余数．

第二天

4. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ．过点 B、C 的圆 Ω 与边 AB、AC 分别交于点 D、E．点 F 在圆 Ω 的劣弧 $\overset{\frown}{DE}$ 上．记 ω 为过点 A、F 且与 Ω 相切的圆．证明：ω 与 Γ 相切的充要条件是 AF 平分 $\angle DFE$．

5. 设 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 为严格递增的正整数数列．假设存在整数 m，使得对所有 $i \geq 1$ 都有 $a_{i+1} - a_i < m$．证明：存在两两不同的下标 p, q, r, s，满足 $a_p a_q = a_r a_s$．

6. 在巴伦 · 蒙乔森的国家中有 2^n 座城市，其编号为从 0 到 $2^n - 1$ 的整数．两座编号为 a 和 b 的城市如果在二进制表示下恰好有一位数字不同，则称它们为友好城市．（例如，当 $n = 3$ 时，编号为 0 与 4 的城市是友好城市，编号为 5 与 7 的城市也是友好城市．）每对友好城市之间都有两条单向道路——即两个方向各一条．每条道路都有一个类别，类别是一个从 1 到 n 的整数．巴伦 · 蒙乔森在旅行中观察到以下规律：

(1) 对每座城市，其所有外出的道路的类别互不相同；

(2) 对每座城市，其所有进入的道路的类别都相同．

求所有满足条件的 n．

1