2022 年巴尔干初中数学奥林匹克

2022-07-03 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8d2737d3040a4a78

1. 求所有正整数对 (a,b)，使得

$$11ab \le a^3 - b^3 \le 12ab.$$

2. 设锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为点 H，A 在 BC 边上的垂足为点 D，且满足 $AH = HD$. 设 $\triangle BHC$ 的外接圆在点 H 处的切线为 ℓ，ℓ 和边 AB、AC 分别交于点 S、T. 设 BH 和 CH 的中点分别为 M 和 N. 求证：SM 和 TN 平行.

3. 求所有四元正整数组 (p,q,a,b)，其中 p 和 q 为素数，$a>1$，满足

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

4. 对正偶数 n，如果集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 能被划分为 $\dfrac{n}{2}$ 个二元子集，且每个子集的元素和均为 3 的幂，则称 n 是“好数”. 例如：6 是“好数”，因为集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 能被划分为 $\{1,2\}$，$\{3,6\}$，$\{4,5\}$. 求小于 3^{2022} 的所有好数的个数.