国家集训队一道数论型函数方程的解答

2021-04-14　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8d514d9f4ab0e40f

题目求所有函数 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$，使得对任意正整数 m，n 满足 $m\geq n$，都有：

$$f(m\varphi(n^3))=f(m)\cdot\varphi(n^3)$$

其中 $\varphi(x)$ 为欧拉函数.

(China TST 2021, Test 2, Day 2 P4)

分析注意到 m 和 n 是独立的，我们可以先对 n 进行赋值，从而得到关于 f 的信息. 注意到欧拉函数的特殊性，我们将 n 赋值为一些素数. 可以看出，对于 $\varphi(p^3)$ 值域中的每个正整数 k，都有 $f(km)=kf(m)$ 对于无穷个正整数 m 成立. 于是猜测 $f(x)=cx$.

解答（PDF 中已展开）

解答

令 $n=2$，得对于 $m\geq 2$，$f(4m)=4f(m)$.

令 $n=4$，得对于 $m\geq 4$，$f(32m)=32f(m)$.

于是对于 $m\geq 4$，有

$$32f(m)=f(32m)=4f(8m)=16f(2m)$$

即 $f(2m)=2f(m)$.

又 $2f(4)=f(8)=4f(2)$，即 $f(4)=2f(2)$.

$2f(6)=f(12)=4f(3)$，即 $f(6)=2f(3)$.

因此对于 $m\geq 2$，有 $f(2m)=2f(m)$.

更一般地，我们可以证明：

p 为任意素数，对于 $m\geq p^2$，都有

$$f(pm)=pf(m).$$

用数学归纳法证明，$p=2$ 时已证.

假设结论对所有小于 p 的素数均成立，考虑 p 时的情形.

令 $n=p$，得对于 $m\geq p$，

$$f(p^2(p-1)m)=p^2(p-1)f(m)$$

令 $n=p^2$，得对于 $m\geq p^2$，

$$f(p^5(p-1)m)=p^5(p-1)f(m)$$

于是对于 $m\geq p^2$，有

$$\begin{aligned}p^5(p-1)f(m)=&f(p^5(p-1)m)\\=&f(p^2(p-1)\cdot p^3m)\\=&p^2(p-1)f(p^3m)\end{aligned}$$

即 $f(p^3m)=p^3f(m)$.

令 $m=m'p$，$n=p$，有

$$\begin{aligned}f(p^3(p-1)m')=&p^3f((p-1)m')\\=&p^2(p-1)f(pm')\end{aligned}$$

注意到 $p-1$ 为合数，其必有一个素因子 q，满足 $p-1\geq q^2$. 可以使用 q 时的结论，将素因子 q 从 f 的括号内拿出来，重复以上操作，即可证明：

$$f((p-1)m')=(p-1)f(m')$$

于是有 $f(pm')=pf(m')$.

由上可知，对于任意素数 p，当 $m\geq p^2$ 时，有 $f(pm)=pf(m)$. 下面将 $m\geq p^2$ 这一限定范围缩小，从而求出 f.

取充分大的 M，使得 $2^Mm\geq p^2$，又 $pm\geq 2\times 2=2^2$，于是

$$\begin{aligned}&p\cdot 2^Mf(m)\\=&p\cdot 2^{M-1}f(2m)=\cdots=p\cdot f(2^Mm)\\=&f(p\cdot 2^Mm)\\=&2f(p\cdot 2^{M-1}m)=\cdots=2^Mf(pm)\end{aligned}$$

即 $f(pm)=pf(m)$ 对于 $m\geq 2$ 恒成立.

对于任意素数 p，q，由

$$f(pq) = pf(q) = qf(p)$$

知 $\dfrac{f(p)}{p}$ 为定值，设为 c.

对于任意的 $n \geq 2$，设 $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.

于是 $f(n) = \dfrac{n}{p_1} f(p_1) = cn$.

特别地，$f(1)$ 为任意正整数时均无法导出矛盾（这是由于要想由条件得到 $f(1)$，只能令 $m = n = 1$，从而得到 $f(1) = f(1)$）.

综上

$$f(n) = \begin{cases} a, & n = 1 \\ cn, & n \geq 2 \end{cases}$$

其中 a，c 均为正整数.