2022 年基辅市数学奥林匹克（第一轮）

2022-01-28　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8dac8765c5f3b5c6

七年级组

1. 将 $\frac{1}{2021}$ 表示为分母较小的两个既约分数之差.

2. 有 n 根具有不同整数长度的棍子，从中任意选择 3 根均能构成一个非退化三角形. 已知其中有长度为 5 和 12 的棍子，求 n 的最大值.

3. 给定 n 个实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n（可以相同）. 考虑由这些数构成的所有 2^n-1 个非空集合，并计算每个集合中所有元素之和. 求元素和等于 1 的集合个数的最大值.
例如：如果给定的实数为 -1，2，2，在元素和中，3 出现一次，4 出现一次，2 出现两次，-1 出现一次，1 出现两次. 故元素和等于 1 的集合个数为 2.

4. 在某个神奇的国家，只有面值为 3，25 和 80 元的钞票. 商人 Victor 在一家餐馆连续吃了 2024 天，且从第二天起，每天恰好比前一天多花 1 元钱（没有找零）. 他是否能恰好使用 1000000 张钞票?

八年级组

1. 考虑 5 个互异的正整数. 它们的平均数是否能：
(1) 恰好比它们的最大公约数大 3 倍?
(2) 恰好比它们的最大公约数大 2 倍?

2. 同七年级组第 3 题

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B>90^\circ$. 其外接圆在点 A 和点 B 处的切线相交于点 P，过 B 作 BC 的垂线交 AC 于点 K. 求证：$PA=PK$.

4. 在 1 到 2022 中，最多能取多少个整数，使得任意两个所选的不同整数之和均能被任意两个所选的不同整数之差整除?

5. 2022 支队伍参加了一场水下马球锦标赛，每两支队伍只交手一次. 胜一场得 2 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分. 比赛结束后，所有队伍的得分互不相同. 在最终积分榜上，各队按总积分排序.
几天后，主办方意识到，由于技术问题，最终积分榜上的结果有误. 每场按照他们所说的平局结束的比赛实际上都有一个胜者，而每场有胜者的比赛实际上都以平局结束. 主办方更正了积分榜，并按总积分排序. 此时，所有队伍的得分仍互不相同.
问：正确的排序能否和原来错误的排序恰好相反?

九年级组

1. 对任意正实数 x，y，求 $\dfrac{(x+y+|x-y|)^2}{xy}$ 的最小值.

2. 对任意实数 x，y，求证：

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}\\ \leq&\sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}+20\end{aligned}$$

1. AL 为 $\triangle ABC$ 的内角平分线. 以 B 为圆心，BL 为半径的圆交射线 AL 于点 L 和点 E，以 C 为圆心，CL 为半径的圆交射线 AL 于点 L 和点 D. 求证：$AL^2=AE\times AD$.

2. 若对任意素数 p，都有 $p^2\nmid n$，则称正整数 n 是平方自由的. 给定一个平方自由的数 $n>1$，且 n 有 d 个正因子. 最多能选择多少个 n 的正因子，使得在所选的数中任取 a 和 b，都有 a^2+ab-n 不为完全平方数.

3. $n\geq 2$ 支队伍参加了一场水下马球锦标赛，每两支队伍只交手一次. 胜一场得 2 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分. 比赛结束后，所有队伍的得分互不相同. 在最终积分榜上，各队按总积分排序.
   几天后，主办方意识到，由于技术问题，最终积分榜上的结果有误. 每场按照他们所说的平局结束的比赛实际上都有一个胜者，而每场有胜者的比赛实际上都以平局结束. 主办方更正了积分榜，并按总积分排序. 此时，所有队伍的得分仍互不相同.
   问：正确的排序能否和原来错误的排序恰好相反?

十年级组

1. 是否存在二次三项式 ax^2+bx+c，其中 a，b，c 为奇数，且 $\dfrac{1}{2022}$ 为其一个根.

2. 给定 $2n$ 个互不相同的整数，求最大的整数 C，使得总能从中选择 C 对数（每个整数至多在一对中），且每对整数之和为合数.

3. 圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 P. $\triangle APD$ 的外接圆和 AB 交于另一点 E，$\triangle BPC$ 的外接圆和 AB 交于另一点 F. 点 P 在 FC 和 DE 上的投影分别为 Q 和 R. 求证：$AB//QR$.

4. 对任意非负实数 x，y，求证：

$$x^2y^2+x^2y+xy^2\leq x^4y+x+y^4$$

1. $m\times n\,(m,n\geq 3)$ 的棋盘左下角有一个黑色棋子，右下角和左上角各有一个白色棋子. Petryk 和 Vasyl 进行一个游戏，Petryk 操作黑色棋子，Vasyl 操作白色棋子，从 Petryk 开始.

在每个玩家的回合中，他可以进行如下操作至多两次：选择自己的一个棋子，并将其移动至相邻单元格．若此时目标单元格已有对手的棋子，则不能进行移动．
若两个白色棋子移动到了同一个单元格，则 Vasyl 获胜．对怎样的 m 和 n，Petryk 能阻止 Vasyl 获胜?

十一年级组

1. 老师在黑板上写下 5 个互异的实数．Petryk 求出其中所有二元组的数之和，并写在黑板左侧；Vasyl 求出其中所有三元组的数之和，并写在黑板左侧（每人写了 10 个数字）．Petryk 和 Vasyl 所写的数字构成的重集是否能相同?

2. 同十年级组第 2 题

3. $\triangle ABC$ 的外心为 O，垂心为 H．OH 交 AB 于点 X，交 AC 于点 Y，且点 H 在线段 OX 上．已知 $XH = HO = OY$．求 $\angle BAC$.

4. 给定 $n \geq 4$ 个正实数．已知其 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个两两的乘积能按照某种顺序排列成等差数列，求证：这 n 个正实数全部相等.

5. 求最小的正整数 n，使得能将一个矩形分割成两种形状的 $2n$ 个矩形，每种形状的矩形各 n 个.