2026 年以色列复仇赛

2026-06-26　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8db0c0dfc01fd3ac

题 1. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，O 为其外心，直线 AO 与 BC 交于点 X. 记 Ω_1、Ω_2 分别为 $\triangle AXB$ 与 $\triangle AXC$ 的九点圆，设 Ω_1 与 Ω_2 的两条外公切线交于点 P.

求证：AP 平分直线 AB 与 AC 的夹角.

题 2. 求所有函数 $f:\mathbb{N}_+\to\mathbb{N}_+$，使得对任意正整数 m,n，都有

$$n-m\mid f(n)-f(m)\Leftrightarrow f(n)f(m)=f(nm).$$

题 3. 给定平面上的一个有界凸图形 T 与正整数 n. 试求最小的常数 C（表示为 T 和 n 的函数），使得对 T 内任意 $2n$ 个点，总能将其划分为两个元素个数相等的子集，且这两个子集的质心之间的距离不超过 C.

注：若一个图形 T 是所有包含它的半平面的交集，则称 T 为凸图形.

题 4. 求出所有形如 $G(P)(x)=\left|F(P)(x)\right|$ 的函数 $G:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$，其中 $F:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ 是实系数一元多项式环上的映射，且对任意多项式 P,Q 均满足以下四条性质：

(1) 保复合性：$F(P\circ Q)=F(P)\circ F(Q)$；
(2) 保次数性：$\deg F(P)=\deg P$；
(3) 若存在正奇数 n 使得 $\deg Q=n\cdot\deg P$，且多项式 P 整除 Q，则 $F(P)$ 整除 $F(Q)$；
(4)F 的像集不包含于全体单项式构成的集合，即 $F(\mathbb{R}[x])\not\subseteq\{Cx^n\mid C\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_+\}$.

注：约定零多项式的次数为 0，即 $\deg 0=0$.