2021 年中国女子数学奥林匹克试题（两天全）

2021-08-13　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8dd17dacc91cfdf5

第一天

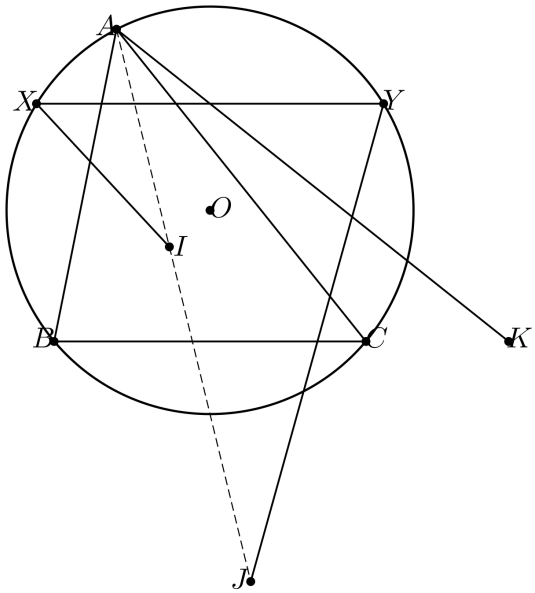
1. 设 n 是正整数，x_1，x_2，$\cdots$，x_{n+1}，p，q 是正实数，满足 $p<q$，且

$$x_{n+1}^p > x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p.$$

(1) 证明：$x_{n+1}^q > x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q$；

(2) 证明：$\left(x_{n+1}^p - \sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} < \left(x_{n+1}^q - \sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

2. 如图所示，在锐角三角形 ABC 中，$AB<AC$，I 是内心，J 是顶点 A 所对的旁心．点 X，Y 分别在三角形 ABC 外接圆的劣弧 AB，AC 上，满足 $\angle AXI = \angle AYJ = 90^\circ$．点 K 在 BC 的延长线上，满足 $KI=KJ$．证明：直线 AK 平分线段 XY．



3. 求最小的正整数 n，使得可将 $n\times n$ 的方格表中的每个小方格染为红、黄、蓝三种颜色之一，满足以下三个条件：

(1) 每种颜色的小方格数目相同；

(2) 若某行中有红格，则该行中必有蓝格，且无黄格；

(3) 若某列中有蓝格，则该列中必有红格，且无黄格．

4. 我们称一个正整数数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是 **CGMO 数列**，如果 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 为严格递增的．并且对任意整数 $n \geq 2022$，a_n 是在所有大于 a_{n-1} 的正整数中满足以下条件的最小数：存在 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的一个非空子集 A_n，使得 $a_n \prod\limits_{a\in A_n} a$ 为完全平方数．证明：存在常数 c_1，c_2，使得对任意一个 **CGMO 数列** $\{a_n\}_{n\geq 1}$，存在正整数 N(依赖于这个数列)，满足对任意整数 $n \geq N$，有 $c_1 \cdot n^2 \leq a_n \leq c_2 \cdot n^2$.

第二天

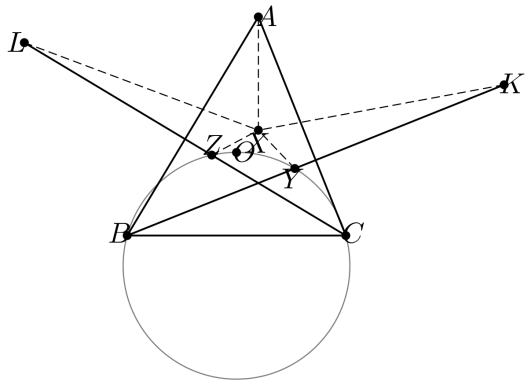
1. 证明：从集合 $\{1, 2, \cdots, 20\}$ 中任取 4 个 (可以相同的) 数后，必可将其中 3 个数适当地记为 a，b，c，使得关于 x 的同余方程 $ax \equiv b (\mathrm{mod}\ c)$ 有整数解.

2. 设 S 是一个有限集合，$P(S)$ 是 S 的所有子集构成的集合．对任意函数 $f : P(S) \to \mathbb{R}$，证明:

$$\sum_{A\in P(S)} \sum_{B\in P(S)} f(A)f(B)2^{|A\cap B|} \geq 0,$$

这里 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

1. 如图所示，在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，O 是外心，点 B 关于 AC 的对称点为 K，点 C 关于 AB 的对称点为 L．X 是 $\triangle ABC$ 内部一点，满足 $AX \perp BC$，$XK = XL$．点 Y，Z 分别在线段 BK，CL 上，满足 $XY \perp CK$，$XZ \perp BL$．证明：B，C，Y，O，Z 五点共圆.



2. 设 m，n 是正整数，定义

$$f(x)=(x-1)(x^2-1)\cdots(x^m-1),$$

$$g(x)=(x^{n+1}-1)(x^{n+2}-1)\cdots(x^{n+m}-1).$$

证明：存在 mn 次整系数多项式 $h(x)$，满足 $f(x)h(x)=g(x)$，并且 $h(x)$ 的 $mn+1$ 个系数均为正整数.