2021 年中国台湾 IMOC——数论组

2021-08-21 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8ee28884040c477a

每年，我国台湾的前 IMO 参赛者组成的小团体都会举办一个夏令营，讲解知识和技巧，还有 8 次模拟考试. 从 2017 年开始，他们取消了模拟考试，用若干练习题来取代. 下面就是 2021 年中国夏令营的 IMOC 练习题.

数论组

1. (LTE 引理) 证明以下四个结论：
   (1) 对任意非零整数 m，n 和质数 p，都有 $v_p(mn)=v_p(m)+v_p(n)$；
   (2) 如果奇质数 p，正整数 k，整数 a 和 b 满足：$p\nmid a$，$p\nmid b$，$p\mid a-b$，$p\nmid k$，则 $v_p(a^k-b^k)=v_p(a-b)$；
   (3) 如果奇质数 p 满足：$p\nmid a$，$p\nmid b$，$p\mid a-b$，则 $v_p(a^p-b^p)=v_p(a-b)+1$；
   (4) 如果奇质数 p，正整数 k，整数 a 和 b 满足：$p\nmid a$，$p\nmid b$，$p\mid a-b$，则 $v_p(a^k-b^k)=v_p(a-b)+v_p(k)$.

2. 求证：对任意两个不同的奇质数 p 和 q，存在一个正整数 n，满足 $\{d(n),d(n+2)\}=\{p,q\}$，其中 $d(n)$ 表示 n 的最小质因子.

3. 定义函数 $f:\mathbb{N}_{>1}\to\mathbb{N}_{>1}$ 满足 $f(x)$ 为 x 的最大质因子. 正整数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=M>1$，且

$$a_n=\begin{cases}a_n-f(a_n), & a_n\text{为合数}\\ a_n+k, & \text{其余情况}\end{cases}$$

求证：对任意正整数 M 和 k，数列 $\{a_n\}$ 有界.

1. $m\geq 3$ 个正整数（不必互异）排列在一个圆周上，满足每个正整数均整除它两边的两个正整数之和. 求证：如果这些数中恰有一个 1，则对任意正整数 n，至多有 $\varphi(n)$ 个 n.

2. 求满足下述所有条件的正整数集合 S：
   (1) 若 a 和 b 均在 S 中（a，b 不必互异），则 $\gcd(a,b)$ 也在 S 中；
   (2) 若正整数 m 和 n 满足 $n\nmid m$，则 S 中存在元素 s 满足 $m^2\mid s$，$n^2\nmid s$；
   (3) 对任意奇质数 p，集合 S 中的元素按照模 p 的余数恰好能分成 $\dfrac{p+1}{2}$ 类.

3. 求证：不存在正整数 x，y，z 满足 $x^x+y^y=9^z$.

4. 给定奇质数 p. 求最大的正整数 k'，使得能将集合 $\{1,2,\cdots,p-1\}$ 分成两个集合 X 和 Y，满足对任意从 0 到 k' 的整数 k，都有

$$\sum_{a\in X}a^k\equiv\sum_{b\in Y}b^k(\mathrm{mod}\ p).$$

5. 求所有整值多项式 f，g：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得 $\forall x\in\mathbb{N}$，$\tau(f(x))=g(x)$ 均成立，其中 $\tau(x)$ 表示 x 的正约数个数.

6. 求所有正整数对 (a,b)，使得存在无穷整数集合 S，任意正整数 n 均能表示为

$$n=x^a+y^b+s$$

的形式，其中 x 和 y 为非负整数，s 为 S 中的元素.

7. 称一个质数 p 为“完美的”，如果存在 1，2，$\cdots$，$p-1$ 的一个排列：a_1，a_2，$\cdots$，$a_{\frac{p-1}{2}}$，b_1，b_2，$\cdots$，$b_{\frac{p-1}{2}}$ 满足对 $\forall 1\le i\le\dfrac{p-1}{2}$，有 $a_i+a_i^{-1}\equiv b_i(\mathrm{mod}\ p)$. 求证：存在无穷多个不完美的质数.

8. 给定一个奇质数 p. 映射 σ：$\{1,\cdots,p-1\}\to\{1,\cdots,p-1\}$ 满足 $i\cdot\sigma(i)\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ 对任意 $i\in\{1,\cdots,p-1\}$ 均成立. 求证：满足 $a<b$ 且 $\sigma(a)>\sigma(b)$ 的数对 $(a,b)\in\{1,\cdots,p-1\}^2$ 的个数至少为

$$\left\lfloor\left(\frac{p-1}{4}\right)^2\right\rfloor.$$

注：如果将结论中的 4 换成更大的常数，则可能会得到部分分数.