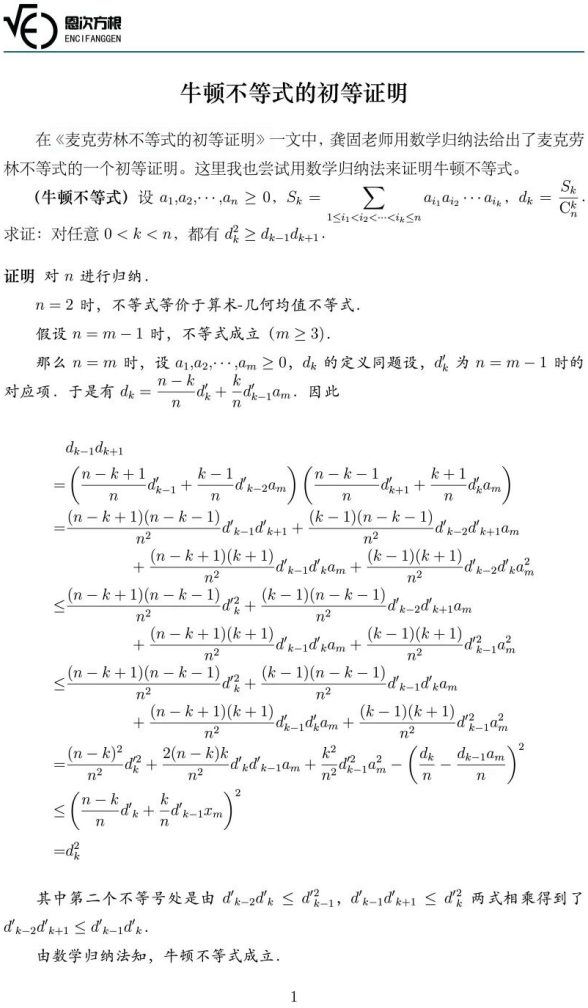
牛顿不等式的初等证明

2022-12-12　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_8f8e93b009c93851

在《麦克劳林不等式的初等证明》一文中，龚固老师用数学归纳法给出了麦克劳林不等式的一个初等证明。这里我也尝试用数学归纳法来证明牛顿不等式。



恩次方根
ENCIFANGGEN

牛顿不等式的初等证明

在《麦克劳林不等式的初等证明》一文中，龚固老师用数学归纳法给出了麦克劳林不等式的一个初等证明。这里我也尝试用数学归纳法来证明牛顿不等式。

（牛顿不等式） 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\geq 0$，$S_k=\sum\limits_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$，$d_k=\dfrac{S_k}{C_n^k}$. 求证：对任意 $0<k<n$，都有 $d_k^2\geq d_{k-1}d_{k+1}$.

证明 对 n 进行归纳.

$n=2$ 时，不等式等价于算术-几何均值不等式.

假设 $n=m-1$ 时，不等式成立 $(m\geq 3)$.

那么 $n=m$ 时，设 $a_1,a_2,\cdots,a_m\geq 0$，d_k 的定义同题设，d'_k 为 $n=m-1$ 时的对应项. 于是有 $d_k=\dfrac{n-k}{n}d'_k+\dfrac{k}{n}d'_{k-1}a_m$. 因此

$$
\begin{aligned}
&d_{k-1}d_{k+1}\\
=&\left(\frac{n-k+1}{n}d'_{k-1}+\frac{k-1}{n}d'_{k-2}a_m\right)\left(\frac{n-k-1}{n}d'_{k+1}+\frac{k+1}{n}d'_ka_m\right)\\
=&\frac{(n-k+1)(n-k-1)}{n^2}d'_{k-1}d'_{k+1}+\frac{(k-1)(n-k-1)}{n^2}d'_{k-2}d'_{k+1}a_m\\
&+\frac{(n-k+1)(k+1)}{n^2}d'_{k-1}d'_ka_m+\frac{(k-1)(k+1)}{n^2}d'_{k-2}d'_ka_m^2\\
\leq&\frac{(n-k+1)(n-k-1)}{n^2}d'^2_k+\frac{(k-1)(n-k-1)}{n^2}d'_{k-2}d'_{k+1}a_m\\
&+\frac{(n-k+1)(k+1)}{n^2}d'_{k-1}d'_ka_m+\frac{(k-1)(k+1)}{n^2}d'^2_{k-1}a_m^2\\
\leq&\frac{(n-k+1)(n-k-1)}{n^2}d'^2_k+\frac{(k-1)(n-k-1)}{n^2}d'_{k-1}d'_ka_m\\
&+\frac{(n-k+1)(k+1)}{n^2}d'_{k-1}d'_ka_m+\frac{(k-1)(k+1)}{n^2}d'^2_{k-1}a_m^2\\
=&\frac{(n-k)^2}{n^2}d'^2_k+\frac{2(n-k)k}{n^2}d'_kd'_{k-1}a_m+\frac{k^2}{n^2}d'^2_{k-1}a_m^2-\left(\frac{d_k}{n}-\frac{d_{k-1}a_m}{n}\right)^2\\
\leq&\left(\frac{n-k}{n}d'_k+\frac{k}{n}d'_{k-1}x_m\right)^2\\
=&d_k^2
\end{aligned}
$$

其中第二个不等号处是由 $d'_{k-2}d'_k\leq d'^2_{k-1}$，$d'_{k-1}d'_{k+1}\leq d'^2_k$ 两式相乘得到了 $d'_{k-2}d'_{k+1}\leq d'_{k-1}d'_k$.

由数学归纳法知，牛顿不等式成立.

1