2025 年沙雷金几何奥林匹克决赛试题

2025-08-13 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_906f10f8c47a8e19

本文为图片版：正文为 3 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2025 年沙雷金几何奥林匹克决赛试题

程国根　译

八年级

1. 已知圆内接五边形 $ABCDE$，对角线 $AC = CE$，且分别与 BD 交于点 M、N．已知 $BM = ND$，$BC \neq CD$．证明：C 关于 BD 中点的对称点在 AE 上．

2. 设 CH 是 $\triangle ABC$ 的高，CA'、CB' 分别是 $\triangle CBH$、$\triangle CAH$ 的角平分线．证明：$\triangle CA'B'$ 的外心与 $\triangle ABC$ 的内心重合当且仅当 $\angle ACB = 90°$．

3. 能否在平面上选取超过 6 个不共线的点，将它们染成 3 种颜色，使得任何一条经过两个不同颜色标记点的直线上，恰好还有一个第三种颜色的标记点？

4. 设 AA_1、CC_1 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，B_0 是 $\triangle ABC$ 外接圆上不包含 B 的弧 AC 的中点．$\triangle AA_1B_0$ 与 $\triangle CC_1B_0$ 的外接圆分别与直线 BC、AB 交于点 P、Q．证明：$\triangle ABC$ 的内心在 PQ 上．

5. 在直角三角形中，直角顶点到其一锐角角平分线的距离等于斜边的四分之一．求该三角形所有可能的内角大小．

6. 设 $ABCD$ 是凸四边形，且 $\angle ABD = \angle ACD = 90°$．以 AB、CD 为直径的两圆交于点 P、Q．证明：$2PQ < AD$．

7. 正三角形 ABC 内接于圆 Ω．以 A、B、C 为圆心的圆 Ω_A、Ω_B、Ω_C 均经过 Ω 上一点 P，且这三个圆有一条公切线．证明：存在一条直线，它与其中两个圆相切且经过 $\triangle ABC$ 的某个顶点．

8. 已知纸质五边形 $ABCDE$，满足 $AB = AE$，$\angle A = \angle B = \angle E = 90°$，$BC = 3$，$CD = 5$，$DE = 2$．仅用直尺，在五边形内部画不超过 6 条直线，作出过 A 且垂直于 CD 的直线．

1

九年级

1. $\triangle ABC$ 的高 AA_1、BB_1 交于点 H（垂心）. 设 A'、B' 分别是 A、B 关于 BB_1、AA_1 的对称点. 证明：$\triangle A'B'C$ 与 $\triangle A'B'H$ 的九点圆相切.

2. 平面上有若干标记点，被染成 4 种颜色，使得任何经过三个不同颜色标记点的圆上，恰好还有一个第四种颜色的标记点. 是否所有标记点一定共圆?

3. 已知 $\triangle ABC$，直线 m_1 分别与 BC、CA、AB 交于点 A_1、B_1、C_1，直线 m_2 分别与 BC、CA、AB 交于点 A_2、B_2、C_2，且 A_1 与 A_2 关于 BC 的中点对称，B_1 与 B_2 关于 CA 的中点对称，C_1 与 C_2 关于 AB 的中点对称. 证明：$m_1 \perp m_2$ 当且仅当 m_1、m_2 是 $\triangle ABC$ 的两条西姆松线（对应其外接圆上的某两点）.

4. 设 $ABCD$ 是圆内接四边形. 过 $\triangle ABC$ 的垂心 H 且分别平行于 BD、CD 的两条直线，分别与 AC、AB 交于点 E、F. 证明：线段 EF 平分线段 DH.

5. 设 BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的高. $\angle B$、$\angle C$ 的内角平分线交于点 I（内心），外角平分线交于点 J. 证明：$IJ > EF$.

6. $\triangle ABC$ 内接于圆 ω，圆 ω 在点 B、C 处的切线交于点 S. 线段 AS 与 BC 交于点 P. $\angle APC$、$\angle SPC$ 的角平分线（射线）分别与 ω 交于点 X、Y. 证明：X、Y、S 共线.

7. 已知 $\triangle ABC$，点 D 是 BC 的垂直平分线上任意一点，且在三角形外部. 直线 BD 与 AC 交于点 C'，直线 CD 与 AB 交于点 B'. 设 M_a 是 BC 的中点，M 是 $\odot BB'D$ 与 $\odot CC'D$ 的另一个交点（异于 D）. 证明：$\triangle DMM_a$ 的外心在一条定直线上.

8. 已知双心四边形 $ABCD$ 的内心 I、其外接圆在 A、C 处切线的交点 E，以及外接圆在 B、D 处切线的交点 F，还原该四边形.

十年级

1. 两个平行四边形 $KL_1M_1N_1$、$KL_2M_2N_2$ 内接于凸四边形 $ABCD$，其中 K 是 AB 的中点，L_1、M_1、N_1 与 L_2、M_2、N_2 分别在边 BC、CD、DA 上．能否使其中一个平行四边形的面积小于四边形面积的一半，且另一个的面积大于四边形面积的一半?

2. 设 I 是不等边 $\triangle ABC$ 的内心，P、Q 是一组等角共轭点，且 $AP \parallel IQ \parallel BC$．证明：$AP = |AB - AC|$．

3. 空间中是否存在 6 点 $A_1, \ldots, A_6$，使得 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle A_4A_5A_6$ 相链接，且将这些点分成任意其他两个三元组所对应的两个三角形均不相链接?（空间中两个三角形相链接是指一个三角形的边界与另一个三角形的内部恰好交于一点．）

4. 设 M、H、L 分别是 $\triangle ABC$ 的重心、垂心、莱莫恩点．点 S 满足 $\odot SLH$、$\odot SML$ 均与 MH 相切，L' 是 L 关于 $\triangle ABC$ 外接圆的对称点．证明：$SL' \parallel MH$．

5. 在正三角形 ABC 内部随机取一点 P，求存在以 AP、BP、CP 为边长的锐角三角形的概率（点在某区域内的概率与该区域的面积成正比）．

6. 设 Ω 与 ω_a 分别是某 $\triangle ABC$ 的外接圆与 A 旁切圆，I_b、I_c 是另外两个旁切圆的圆心，A_b、A_c 分别是 AB、AC 的延长线与 ω_a 的切点．证明：直线 A_bI_b 与 A_cI_c 的交点不依赖于 $\triangle ABC$．

7. 设 $ABCD$ 是圆内接四边形，某一圆锥曲线经过 A、B、C、D．考虑该圆锥曲线关于 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ACD$ 的等角共轭像（四条直线）．证明：这四条直线构成的四边形是外切四边形（有内切圆）．

8. 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，直线 l 分别与 AB、AC 及直线 BC 交于点 C_1、B_1、A_1．圆 ω_a 与 BC 切于 A，且与 $\triangle ABC$ 外接圆的劣弧 BC 相切；圆 ω_b、ω_c 定义类似．证明：这三个圆有一条公切线．