数学竞赛每日一练第 19 期解答

2021-06-23 原文链接

网站版本 21bf3079f0b5 · 文章 ID h_90c8cd62b3cd8299

设 a，b，c 是两两不同的非零实数，求以下表达式的最小值：

$$\frac{(a+3b)^2}{(a-b)^2}+\frac{(b+3c)^2}{(b-c)^2}+\frac{(c+3a)^2}{(c-a)^2}.$$

解答（PDF 中已展开）

解答设 $x=\dfrac{a+3b}{a-b}$，$y=\dfrac{b+3c}{b-c}$，$z=\dfrac{c+3a}{c-a}$. 则

$$\begin{aligned}&(x-1)(y-1)(z-1)\\=&\frac{4b}{a-b}\cdot\frac{4c}{b-c}\cdot\frac{4a}{c-a}\\=&\frac{4a}{a-b}\cdot\frac{4b}{b-c}\cdot\frac{4c}{c-a}\\=&(x+3)(y+3)(z+3)\end{aligned}$$

即

$$xy+yz+zx+7+3(x+y+z)=0$$

从而

$$\begin{aligned}&\frac{(a+3b)^2}{(a-b)^2}+\frac{(b+3c)^2}{(b-c)^2}+\frac{(c+3a)^2}{(c-a)^2}\\=&x^2+y^2+z^2\\=&(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\\=&(x+y+z)^2+4(x+y+z)+14\\=&(x+y+z+2)^2+10\\\geq&10\end{aligned}$$

最后，当 $a=-1$，$b=1$，$c=\sqrt{17}-4$ 时，原式取值为 10，故原式最小值为 10.