2026 年印度数学奥林匹克

2026-01-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_90d8f8e75c895a3c

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2026 年印度数学奥林匹克

程国根 译

1. 正整数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 定义如下：$x_1 = 1$，且对任意正整数 n，有 $x_{n+1} = x_n + \lfloor \sqrt{x_n} \rfloor$. 求所有正整数 m，使得存在某个正整数 n，满足 $x_n = m^2$.

2. 设函数 $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ 满足：对于任意正整数 $k > 2026$，$f(k)$ 表示数列 $f(1), f(2), \cdots, f(k-1)$ 中某数出现次数的最大值. 证明：存在无穷多个正整数 n，使得 $f(n) = f(n + f(n))$.

3. 设 $\triangle ABC$ 是一个不等边的锐角三角形，其外接圆为 Γ. 设 M 为 BC 的中点，N 为 Γ 上 BC 所对劣弧的中点. 点 P, Q 分别位于线段 AB, AC 上，满足 $BP = BN$ 且 $CQ = CN$. 点 K（K N）位于直线 AN 上，且满足 $MK = MN$. 证明：$\angle PKQ = 90^\circ$.

4. 若对于任意素数 p，p 要么同时整除整数 a 和 b，要么同时不整除 a 和 b，则称整数 a 和 b 为相伴数. 求所有函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足以下条件：

(1) $f(0) = 0$;

(2) 对任意 $m, n \in \mathbb{N}$，$f(m) + n$ 与 $f(n) + m$ 均为相伴数.

1

5. 平面上的三条直线 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 构成一个锐角三角形 $\mathcal{T}$. 点 P 位于 $\mathcal{T}$ 的内部. 对每个 $i \in \{1,2,3\}$, 定义 τ_i 关于直线 ℓ_i 的对称变换. 对 $(1,2,3)$ 的每个排列 (i,j,k), 记点 $\tau_k(\tau_j(\tau_i(P)))$ 为 P_{ijk}.
证明: 点 $P_{123}, P_{132}, P_{213}, P_{231}, P_{312}, P_{321}$ 共圆的充要条件是点 P 为三角形 $\mathcal{T}$ 的垂心.

6. 正午时分, 桌上放着两副牌 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$, 每副各有 40 张. 此后每分钟, 我们取出牌 $\mathcal{A}$ 的顶牌 a 和牌 $\mathcal{B}$ 的顶牌 b, 进行一场对决.
对于任意两张牌 $a \in \mathcal{A}$ 和 $b \in \mathcal{B}$, 每次 a 与 b 对决的结果都固定不变, 且与其他所有对决的结果相互独立. 一场对决有三种可能的结果:

(1) 若其中一张牌获胜, 则获胜的牌放回其牌堆的顶部, 落败的牌放到其牌堆的底部;

(2) 若 a 与 b 势均力敌, 则两者都从各自的牌堆中移除;

(3) 若 a 与 b 互不影响, 则两者都放到各自牌堆的底部.

当两副牌都被清空时, 这个过程结束; 若某个过程能够结束, 则称其为一局游戏. 证明: 一局游戏最长可持续 356 小时.

2