基于柯西不等式的一种代换方法

2023-03-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_910e8e029aed1865

我们先看一道柯西不等式的入门题目：

题目 1:

设 $n(\geq 3)$ 为正整数，a、b 为给定的实数，实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=a,$$

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=b,$$

则当 $b<\dfrac{a^2}{n}$ 时，x_1 不存在；
当 $b=\dfrac{a^2}{n}$ 时，$x_1=\dfrac{a}{n}$；
当 $b>\dfrac{a^2}{n}$ 时，x_1 满足

$$\frac{a-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}{n}\leq x_1\leq\frac{a+\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}{n},$$

其中 Δ 为二次方程 $nx_0^2-2ax_0+a^2-(n-1)b=0$ 的判别式.

解答（PDF 中已展开）

分析：

把 x_1 和 x_1^2 移到等式右边，对 $\sum\limits_{i=2}^{n}x_i$ 和 $\sum\limits_{i=2}^{n}x_i^2$ 使用柯西不等式即可.

同理可得到 x_2，$\cdots$，x_n 的范围.

现在我们知道，对和与平方和确定的一组数 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，我们可以求出其中每一个数的范围，由此进一步地去分析不等式.

很多时候要证明的不等式并不会给出 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ 的值，此时我们往往可以利用齐次性，设 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=n$，再由

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\leq\sum_{i=1}^{n}x_i^2<\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

得到 $n\leq\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2<n^2$.

下面我们考虑：怎样设 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ 的值，能起到简化问题的作用.

一个自然的想法是，让**题目 1** 中的 Δ 是个完全平方式，当然同时还要满足 $n\leq\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2<n^2$ 这一条件.

$$\begin{aligned}\Delta =&4a^2-4n(a^2-(n-1)b)\\ =&4n^2-4n(n^2-(n-1)b)\\ =&4n^2(n-1)\left(\frac{b}{n}-1\right)\end{aligned}$$

为满足要求，可设 $\dfrac{b}{n}-1=(n-1)t^2$，即 $b=n+n(n-1)t^2$，再由 $n\le b<n^2$ 可得 $t\in[0,1)$，这是一个非常好的范围.

此时，$\Delta=(2n(n-1)t)^2$，代入**题目 1** 可得

$$1-(n-1)t\le x_i\le 1+(n-1)t.$$

$$1-(n-1)t\le x_i\le 1+(n-1)t.$$

$$1-(n-1)t\le x_i\le 1+(n-1)t.$$

方法总结：

对出现了 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ 的齐次不等式（要求 $x_i>0$），可不妨设 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=n$，并设 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=n+n(n-1)t^2$，其中 $t\in[0,1)$.

由此可得，对 $\forall 1\le i\le n$，有

$$1-(n-1)t\le x_i\le 1+(n-1)t.$$

下面我们用这个代换方法来解决一道不等式：

题目 2:

设 $n\ge 3$，x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为正实数，且和为 S. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+n(n-2)S\le S\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{S-x_i}{x_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+n(n-2)S\le S\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{S-x_i}{x_i}$$

解答（PDF 中已展开）

证明：

由齐次性不妨设 $S=n$，设 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=n+n(n-1)t^2$，其中 $t\in[0,1)$.

由此可得，对 $\forall 1\le i\le n$，有

$$1-(n-1)t\le x_i\le 1+(n-1)t.$$

原不等式等价于

$$
\begin{aligned}
&(n+n(n-1)t^2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+n^2(n-2)\le n\left(n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-n\right)\\
\iff& n(n-1)(1-t^2)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\ge n^2(n-1)\\
\iff&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\ge\frac{n}{1-t^2}
\end{aligned}
$$

(此时，问题转变成了求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}$ 的最小值（和 t 有关），由于每个 x_i 都有范围限制，猜测最小值在某个 x_i 为端点值时取得。事实上，这和不等式中的 EV 定理有关，这里不展开说明)

注意到 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 中，一个取得 $1+(n-1)t$ 时，**题目 1** 证明过程中的柯西不等式恰好取得等号，于是另外 $n-1$ 个数的值相等，均为 $1-t$. 由此构造局部不等式:

$$
\begin{aligned}
&(1+(n-1)t-x_i)(1-t-x_i)^2\ge 0\\
\iff& x_i^3-(3+(n-3)t)x_i^2+(1-t)(3+(2n-3)t)x_i-(1-t)^2(1+(n-1)t)\le 0\\
\iff&\frac{(1-t)^2(1+(n-1)t)}{x_i}\ge x_i^2-(3+(n-3)t)x_i+(1-t)(3+(2n-3)t)
\end{aligned}
$$

求和得:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-t)^2(1+(n-1)t)}{x_i}\\
\ge&\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-(3+(n-3)t)x_i+(1-t)(3+(2n-3)t)\right)\\
=&n+n(n-1)t^2-(3+(n-3)t)n+((1-t)(3+(2n-3)t))n\\
=&n(1-t)(1+(n-2)t)
\end{aligned}
$$

于是

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\ge\frac{n-1}{1-t}+\frac{1}{1+(n-1)t}
$$

(注：即为上面所说的取等条件，一个为 $1+(n-1)t$，另外 $n-1$ 个为 $1-t$.) 因此，只需证明:

$$
\begin{aligned}
&\frac{n-1}{1-t}+\frac{1}{1+(n-1)t}\ge\frac{n}{1-t^2}\\
\iff&\frac{1}{1+(n-1)t}\ge\frac{n}{1-t^2}-\frac{n-1}{1-t}=\frac{1-(n-1)t}{1-t^2}\\
\iff&1-t^2\ge 1-(n-1)^2t^2\\
\iff&n(n-2)t^2\ge 0
\end{aligned}
$$

由 ≥ 3 知，结论成立. $\square$

本题也有一个恒等变形的方法，供读者参考.

证明. 原不等式等价于证明

$$\left(S^2-\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\geq n(n-1)S\Leftrightarrow\sum_{1\leq i<j\leq n}2a_ia_j\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\geq n(n-1)S.$$

另外, 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n}2a_ia_j\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}&=\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}a_ia_j\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\\&=\sum_{i=1}^n\left[\sum_{j\neq i}a_j\cdot\left(a_i\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right)\right]\\&=\sum_{i=1}^n\left[\sum_{j\neq i}a_j\cdot\left(1+\sum_{j\neq i}\frac{a_i}{a_j}\right)\right]\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}a_j+\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j\neq i}\frac{1}{a_j}\cdot\sum_{j\neq i}a_j\right)\cdot a_i.\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式, 得

$$\sum_{j\neq i}\frac{1}{a_j}\cdot\sum_{j\neq i}a_j\geq(n-1)^2.$$

又 $\sum_{j\neq i}a_j=S-a_i$, 则

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}2a_ia_j\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\geq(n-1)S+(n-1)^2S=n(n-1)S.$$

从而原不等式成立.

利用一样的方法，读者可以自己完成下面两题:

题目 3:

设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 是正实数，证明:

$$\sum_{i=1}^n x_i\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\geq\frac{(n-1)^2\cdot\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{\sum\limits_{1\leq k<j\leq n}x_kx_j}+n^2-2n+2.$$

题目 4:

设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 是正实数，证明:

$$\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}+\frac{n(n-2)}{\sum\limits_{i=1}^n x_i}\geq\frac{(n-1)^2\cdot\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{\sum\limits_{1\leq k<j\leq n}x_kx_j}.$$