用曲线系方法解 2023 年 ELMO 预选题 G7

2023-11-07 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_91467687681d24e0

2023 年 ELMO 预选题 G7

已知椭圆 $\mathcal{E}$ 的焦点为 F_1 和 F_2，P 是 $\mathcal{E}$ 上一点. 直线 PF_1 和 PF_2 分别再次交 $\mathcal{E}$ 于不同的点 A 和点 B，点 A 和点 B 处的 $\mathcal{E}$ 的切线交于点 Q. 证明：PQ 的中点在 $\triangle PF_1F_2$ 的外接圆上.

证明 设椭圆为：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，$c=\sqrt{a^2-b^2}$.

则 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

$\mathcal{E}$ 在点 P 处的切线 PP 方程为：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$.

点 Q 关于 $\mathcal{E}$ 的切点弦方程为：$\dfrac{x_2x}{a^2}+\dfrac{y_2y}{b^2}=1$.

过 P,P,A,B 四点的二次曲线系方程为：

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\mu\left(\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}-1\right)=0. \tag{1}$$

其中一条为双直线 $PA\times PB$：

$$(y_1x-(x_1+c)y+y_1c)(y_1-(x_1-c)y-y_1c)=0. \tag{2}$$

对比 (1) 和 (2) 中 x 的系数得：

$$\mu\left(\frac{x_1}{a^2}\cdot(-1)+(-1)\cdot\frac{x_2}{a^2}\right)=y_1\cdot(-y_1)+y_1\cdot y_1$$

注意到 $\mu \neq 0$（否则为椭圆），于是 $x_1 + x_2 = 0$.

对比 (1) 和 (2) 中 y 的系数得:

$$\mu\left(\frac{y_1}{b^2}\cdot(-1)+(-1)\cdot\frac{y_2}{b^2}\right)=-(x_1+c)\cdot(-y_1)+y_1\cdot(-(x_1-c))$$

化简得: $y_1 + y_2 = -\dfrac{2b^2c^2y_1}{\mu}$.

对比 (1) 和 (2) 中 xy 的系数得:

$$\mu\left(\frac{x_1}{a^2}\cdot\frac{y_2}{b^2}+\frac{y_1}{b^2}\cdot\frac{x_2}{a^2}\right)=y_1\cdot(-(x_1-c))+(-(x_1+c))\cdot y_1$$

代入 $x_1 + x_2 = 0$，并化简得: $y_1 - y_2 = \dfrac{2a^2b^2y_1}{\mu}$.

于是 $\dfrac{y_1-y_2}{y_1+y_2} = -\dfrac{a^2}{c^2}$，即 $\dfrac{y_1+y_2}{2} = -\dfrac{c^2}{b^2}y_1$.

因此 PQ 中点 M 的坐标为 $\left(0, -\dfrac{c^2}{b^2}y_1\right)$.

由对称性不妨设 $y_1 > 0$.

设 $\angle F_1PF_2 = \alpha, \angle F_1MF_2 = \beta$, 则只需证明: $\alpha+\beta = \pi$.

熟知 $S_{\triangle PF_1F_2} = b^2\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot y_1$, 于是 $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{cy_1}{b^2}$.

因为 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形, 故 $\tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{c}{\frac{c^2}{b^2}y_1} = \dfrac{b^2}{cy_1}$.

因此 $\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2} = 1$，证毕.

2023 年 ELMO 预选题 G7

已知椭圆 $\mathcal E$的焦点为 F_1和 F_2，P是 $\mathcal E$上一点. 直线 PF_1和 PF_2分别再次交 $\mathcal E$于不同的点 A和点 B，点 A和点 B处的 $\mathcal E$的切线交于点 Q. 证明：PQ的中点在 $\triangle PF_1F_2$的外接圆上.

设椭圆为：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），$c=\sqrt{a^2-b^2}$. 则 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$. $\mathcal E$在点 P处的切线 PP方程为：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$. 点 Q关于 $\mathcal E$的切点弦方程为：$\dfrac{x_2x}{a^2}+\dfrac{y_2y}{b^2}=1$. 过 P,P,A,B四点的二次曲线系方程为：$$\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right)+\mu\left(\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}-1\right)=0.$$

其中一条为双直线 $PA\times PB$：$$(y_1x-(x_1+c)y+y_1c)(y_1-(x_1-c)y-y_1c)=0.$$

对比 (1)和 (2)中 x的系数得：$$\mu\left(\frac{x_{1}}{a^{2}}\cdot(-1)+(-1)\cdot\frac{x_{2}}{a^{2}}\right)=y_{1}\cdot(-y_{1})+y_{1}\cdot y_{1}$$ 注意到 $\mu\neq 0$

(否则为椭圆)，于是 $x_{1}+x_{2}=0$. 对比 (1)和 (2)中 y的系数得：$$\mu\left(\frac{y_{1}}{b^{2}}\cdot(-1)+(-1)\cdot\frac{y_{2}}{b^{2}}\right)=-(x_{1}+c)\cdot(-y_{1})+y_{1}\cdot(-(x_{1}-c))$$ 化简得：$y_{1}+y_{2}=-\dfrac{2b^{2}c^{2}y_{1}}{\mu}$. 对比 (1)和 (2)中 xy的系数得：$$\mu\left(\frac{x_{1}}{a^{2}}\cdot\frac{y_{2}}{b^{2}}+\frac{y_{1}}{b^{2}}\cdot\frac{x_{2}}{a^{2}}\right)=y_{1}\cdot(-(x_{1}-c))+(-(x_{1}+c))\cdot y_{1}$$ 代入 $x_{1}+x_{2}=0$，并化简得：$y_{1}-y_{2}=\frac{2a^{2}b^{2}y_{1}}{\mu}$. 于是 $\dfrac{y_{1}-y_{2}}{y_{1}+y_{2}}=-\dfrac{a^{2}}{c^{2}}$，即 $\dfrac{y_{1}+y_{2}}{2}=-\dfrac{c^{2}}{b^{2}}y_{1}$. 因此 PQ中点 M的坐标为 $\left(0,-\dfrac{c^{2}}{b^{2}}y_{1}\right)$. 由对称性不妨设 $y_{1}>0$. 设 $\angle F_{1}PF_{2}=\alpha$，$\angle F_{1}MF_{2}=\beta$，则只需证明：$\alpha+\beta=\pi$. 熟知 $S_{\triangle PF_{1}F_{2}}=b^{2}\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot y_{1}$，于是 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{cy_{1}}{b^{2}}$. 因为 $\triangle MF_{1}F_{2}$为等腰三角形，故 $\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{c}{\frac{c^{2}}{b^{2}}y_{1}}=\dfrac{b^{2}}{cy_{1}}$. 因此 $\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}=1$，证毕.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023 年 ELMO 预选题 G7}
已知椭圆$\mathcal E$的焦点为$F_1$和$F_2$，$P$是$\mathcal E$上一点．直线$PF_1$和$PF_2$分别再次交$\mathcal
↪ E$于不同的点$A$和点$B$，点$A$和点$B$处的$\mathcal E$的切线交于点$Q$．证明：$PQ$的中点在$\triangle
↪ PF_1F_2$的外接圆上.
\begin{proof} 设椭圆为：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），$c=\sqrt{a^2-b^2}$.
则 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.
$\mathcal E$ 在点 $P$ 处的切线 $PP$ 方程为：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$.
点 $Q$ 关于 $\mathcal E$ 的切点弦方程为：$\dfrac{x_2x}{a^2}+\dfrac{y_2y}{b^2}=1$.
过$P,P,A,B$四点的二次曲线系方程为：\begin{equation}\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right)+\mu\left(\frac{x_1
↪ x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}-1\right)=0.\end{equation}
其中一条为双直线 $PA\times PB$：\begin{equation}(y_1x-(x_1+c)y+y_1c)(y_1-(x_1-c)y-y_1c)=0.\end{equation}
对比$(1)$和$(2)$中$x$的系数得：
↪ $$\mu\left(\frac{x_{1}}{a^{2}}\cdot(-1)+(-1)\cdot\frac{x_{2}}{a^{2}}\right)=y_{1}\cdot(-y_{1})+y_{1}\cdot y_{1}$$
注意到 $\mu\neq 0$（否则为椭圆），于是 $x_{1}+x_{2}=0$.
对比$(1)$和$(2)$中$y$的系数得：
↪ $$\mu\left(\frac{y_{1}}{b^{2}}\cdot(-1)+(-1)\cdot\frac{y_{2}}{b^{2}}\right)=-(x_{1}+c)\cdot(-y_{1})+y_{1}\cdot(-(x_{1}-c))$$
化简得：$y_{1}+y_{2}=-\dfrac{2b^{2}c^{2}y_{1}}{\mu}$.
对比$(1)$和$(2)$中$xy$的系数得：$$\mu\left(\frac{x_{1}}{a^{2}}\cdot\frac{y_{2}}{b^{2}}+\frac{y_{1}}{b^{2}}\cdot\frac{x_{2}}{a^{2}}
↪ \right)=y_{1}\cdot(-(x_{1}-c))+(-(x_{1}+c))\cdot y_{1}$$
代入 $x_{1}+x_{2}=0$，并化简得：$y_{1}-y_{2}=\frac{2a^{2}b^{2}y_{1}}{\mu}$.
于是 $\dfrac{y_{1}-y_{2}}{y_{1}+y_{2}}=-\dfrac{a^{2}}{c^{2}}$，即 $\dfrac{y_{1}+y_{2}}{2}=-\dfrac{c^{2}}{b^{2}}y_{1}$.
因此 $PQ$ 中点 $M$ 的坐标为 $\left(0,-\dfrac{c^{2}}{b^{2}}y_{1}\right)$.
由对称性不妨设 $y_{1}>0$.
设 $\angle F_{1}PF_{2}=\alpha$，$\angle F_{1}MF_{2}=\beta$，则只需证明：$\alpha+\beta=\pi$.
熟知$S_{\triangle PF_{1}F_{2}}=b^{2}\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot y_{1}$，
↪ 于是$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{cy_{1}}{b^{2}}$.
因为 $\triangle MF_{1}F_{2}$ 为等腰三角形，故 $\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{c}{\frac{c^{2}}{b^{2}}y_{1}}=\dfrac{b^{2}}{cy_{1}}$.
因此 $\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}=1$，证毕．\end{proof}
```