# 2024 年以色列复仇赛

2024-06-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_91c3352ac824ed9e

## 2024 年以色列复仇赛

程国根 译

**1.** 求所有素数 $p$，使得对任意素数 $q<p$ 和 $x\in\mathbb{Z}$，都有 $p\nmid x^2-q$.

**2.** 给定整数 $n\geq 2$. 对所有正整数 $m$ 与所有满足 $\sum_{i=1}^{m}k_i=n$ 的正整数列 $0<k_1<k_2<\cdots<k_m$，Michael 在黑板上写下 $\dfrac{1}{k_1k_2\cdots k_m}$. 求证：黑板上所有数字之和小于 1.

**3.** 一个国家有 5784 个城市. Alpaca 在每一对城市之间修建一条道路或一条河流，此外，她在每个城市都放置一条鱼来保卫城市. 随后，Bear 选择了一个城市开始他的旅行. 他在开始时要选择是坐车还是坐船旅行. 船可以在河流中航行，但不能在道路上行驶，汽车可以在道路上行驶，但不能在河流中航行. 每当 Bear 离开一座城市，他将带走这座城市里的鱼，这座城市也因此而倒塌，Bear 无法再回到这个城市. 无论 Alpaca 怎么修建道路或河流，Bear 能保证自己带走鱼的最大数量是多少?
注：Bear 也从他开始旅行的城市里带走了一条鱼（城市倒塌了）. 所有的道路和河流都是双向的.

**4.** 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，设 $M_A,M_B,M_C$ 分别为 $BC,CA,AB$ 的中点，$O$ 为 $\triangle ABC$ 的外心. 点 $D$ 在边 $BC$ 内部，点 $E$ 为 $D$ 在 $AC$ 上的射影，点 $F$ 为 $E$ 在 $AB$ 上的射影. 设 $P=EF\cap M_AM_B$，$S=DE\cap M_AM_C$. 已知 $AD,BE,CF$ 三线共点，求证：$O,P,S$ 三点共线.



1. 求所有素数 $p$，使得对任意素数 $q<p$和 $x\in\mathbb{Z}$，都有 $p\nmid x^{2}-q$.

2. 给定整数 $n\ge 2$. 对所有正整数 $m$与所有满足 $\sum_{i=1}^{m}k_{i}=n$的正整数列 $0<k_{1}<k_{2}<\cdots<k_{m}$，Michael 在黑板上写下 $\dfrac{1}{k_{1}k_{2}\cdots k_{m}}$. 求证：黑板上所有数字之和小于 $1$.

3. 一个国家有 $5784$个城市. Alpaca 在每一对城市之间修建一条道路或一条河流，此外，她在每个城市都放置一条鱼来保卫城市. 随后，Bear 选择了一个城市开始他的旅行. 他在开始时要选择是坐车还是坐船旅行. 船可以在河流中航行，但不能在道路上行驶，汽车可以在道路上行驶，但不能在河流中航行. 每当 Bear 离开一座城市，他将带走这座城市里的鱼，这座城市也因此而倒塌，Bear 无法再回到这个城市. 无论 Alpaca 怎么修建道路或河流，Bear 能保证自己带走鱼的最大数量是多少？注：Bear 也从他开始旅行的城市里带走了一条鱼（城市倒塌了）. 所有的道路和河流都是双向的.

4. 设 $\triangle ABC$为锐角三角形，设 $M_{A},M_{B},M_{C}$分别为 $BC,CA,AB$的中点，$O$为 $\triangle ABC$的外心. 点 $D$在边 $BC$内部，点 $E$为 $D$在 $AC$上的射影，点 $F$为 $E$在 $AB$上的射影. 设 $P=EF\cap M_AM_B$，$S=DE\cap M_AM_C$. 已知 $AD,BE,CF$三线共点，求证：$O,P,S$三点共线.

**解答（PDF 中已展开）**

\ex 求所有素数$p$，使得对任意素数$q<p$和$x\in\mathbb{Z}$，都有$p\nmid x^{2}-q$. \ex 给定整数$n\ge 2$.
↪ 对所有正整数$m$与所有满足$\sum_{i=1}^{m}k_{i}=n$的正整数列$0<k_{1}<k_{2}<\cdots<k_{m}$，
↪ Michael在黑板上写下$\dfrac{1}{k_{1}k_{2}\cdots k_{m}}$. 求证：黑板上所有数字之和小于$1$. \ex 一个国家有$5784$个城市.
↪ Alpaca在每一对城市之间修建一条道路或一条河流，此外，她在每个城市都放置一条鱼来保卫城市. 随后，
↪ Bear选择了一个城市开始他的旅行. 他在开始时要选择是坐车还是坐船旅行. 船可以在河流中航行，但不能在道路上行驶，
↪ 汽车可以在道路上行驶，但不能在河流中航行. 每当Bear离开一座城市，他将带走这座城市里的鱼，这座城市也因此而倒塌，
↪ Bear无法再回到这个城市. 无论Alpaca怎么修建道路或河流，Bear能保证自己带走鱼的最大数量是多少？注：
↪ Bear也从他开始旅行的城市里带走了一条鱼（城市倒塌了）. 所有的道路和河流都是双向的. \ex 设$\triangle
↪ ABC$为锐角三角形，设$M_{A},M_{B},M_{C}$分别为$BC,CA,AB$的中点，$O$为$\triangle ABC$的外心.
↪ 点$D$在边$BC$内部，点$E$为$D$在$AC$上的射影，点$F$为$E$在$AB$上的射影. 设$P=EF\cap M_AM_B$，$S=DE\cap
↪ M_AM_C$. 已知$AD,BE,CF$三线共点，求证：$O,P,S$三点共线.