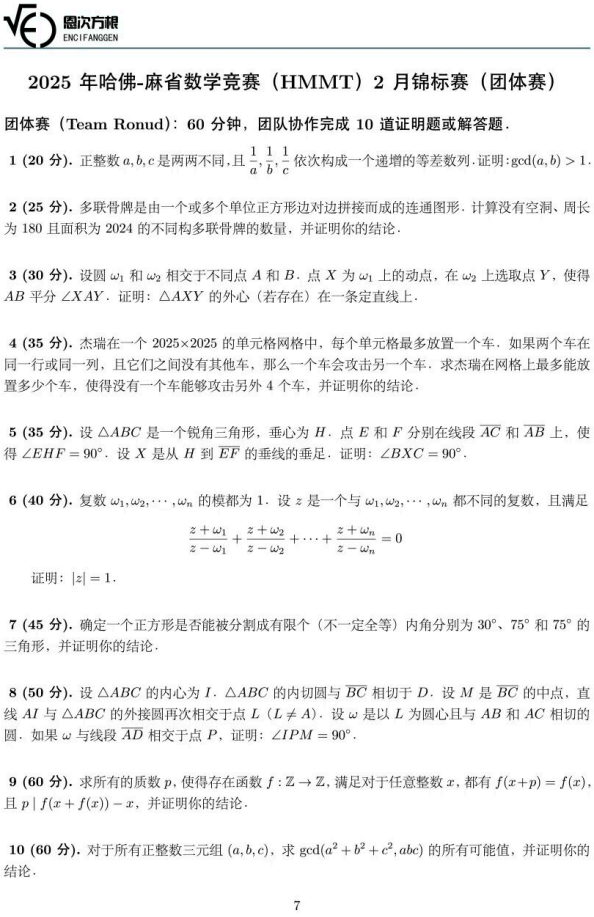
2025 年哈佛-麻省数学竞赛（HMMT）2 月锦标赛（团体赛与抢答赛）

2025-02-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_930a66430f0d5efa

本文为图片版：正文为 4 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。



恩次方根
ENCIFANGGEN

2025 年哈佛-麻省数学竞赛（HMMT）2 月锦标赛（团体赛）

团体赛（Team Ronud）：60 分钟，团队协作完成 10 道证明题或解答题.

1 (20 分). 正整数 a,b,c 是两两不同，且 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 依次构成一个递增的等差数列. 证明：$\gcd(a,b)>1$.

2 (25 分). 多联骨牌是由一个或多个单位正方形边对边拼接而成的连通图形. 计算没有空洞、周长为 180 且面积为 2024 的不同构多联骨牌的数量，并证明你的结论.

3 (30 分). 设圆 ω_1 和 ω_2 相交于不同点 A 和 B. 点 X 为 ω_1 上的动点，在 ω_2 上选取点 Y，使得 AB 平分 $\angle XAY$. 证明：$\triangle AXY$ 的外心（若存在）在一条定直线上.

4 (35 分). 杰瑞在一个 2025×2025 的单元格网格中，每个单元格最多放置一个车. 如果两个车在同一行或同一列，且它们之间没有其他车，那么一个车会攻击另一个车. 求杰瑞在网格上最多能放置多少个车，使得没有一个车能够攻击另外 4 个车，并证明你的结论.

5 (35 分). 设 $\triangle ABC$ 是一个锐角三角形，垂心为 H. 点 E 和 F 分别在线段 $\overline{AC}$ 和 $\overline{AB}$ 上，使得 $\angle EHF=90^\circ$. 设 X 是从 H 到 $\overline{EF}$ 的垂线的垂足. 证明：$\angle BXC=90^\circ$.

6 (40 分). 复数 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 的模都为 1. 设 z 是一个与 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 都不同的复数，且满足

$$\frac{z+\omega_1}{z-\omega_1}+\frac{z+\omega_2}{z-\omega_2}+\cdots+\frac{z+\omega_n}{z-\omega_n}=0$$

证明：$|z|=1$.

7 (45 分). 确定一个正方形是否能被分割成有限个（不一定全等）内角分别为 30°、75° 和 75° 的三角形，并证明你的结论.

8 (50 分). 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I. $\triangle ABC$ 的内切圆与 $\overline{BC}$ 相切于 D. 设 M 是 $\overline{BC}$ 的中点，直线 AI 与 $\triangle ABC$ 的外接圆再次相交于点 L（$L\neq A$）. 设 ω 是以 L 为圆心且与 AB 和 AC 相切的圆. 如果 ω 与线段 $\overline{AD}$ 相交于点 P，证明：$\angle IPM=90^\circ$.

9 (60 分). 求所有的质数 p，使得存在函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，满足对于任意整数 x，都有 $f(x+p)=f(x)$，且 $p\mid f(x+f(x))-x$，并证明你的结论.

10 (60 分). 对于所有正整数三元组 (a,b,c)，求 $\gcd(a^2+b^2+c^2,abc)$ 的所有可能值，并证明你的结论.

7

恩次方根
ENCIFANGGEN

2025 年哈佛-麻省数学竞赛（HMMT）2 月锦标赛（抢答赛）

抢答赛（Guts Ronud）：80 分钟，团队协作完成 36 道题，按组提交并实时记分

1 (5 分). 如果一个 9 位数恰好使用 1 到 9 这 9 个数字各一次，就称它为“食火鸡数”. 计算“食火鸡数”中质数的个数.

2 (5 分). 计算 $\dfrac{20+\frac{1}{25-\frac{1}{20}}}{25+\frac{1}{20-\frac{1}{25}}}$ 的值.

3 (5 分). 雅各布掷两枚标准的六面骰子. 如果这两枚骰子的结果相同，他就再掷一枚标准的六面骰子. 计算他掷出的所有骰子点数之和为偶数的概率.

4 (5 分). 设 $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形. 对于满足 $[PAB]+[PAC]=[PBC]$ 的 $\triangle ABC$ 内部所有点 P，计算 PA 的最小可能长度.（这里，$[XYZ]$ 表示 $\triangle XYZ$ 的面积）

5 (6 分). 计算在坐标平面中，包含在区域 $|x+|y|| \le 1$ 内的圆的最大可能半径.

6 (6 分). 设 $\triangle ABC$ 是等边三角形. 点 D 在线段 $\overline{BC}$ 上，且 $BD=1$，$DC=4$. 点 E 和 F 分别在射线 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 上，使得 D 是 $\overline{EF}$ 的中点. 计算 EF 的长度.

7 (6 分). 已知 $\dfrac{9^9-8^8}{1001}$ 是一个整数. 计算它的质因数之和.

8 (6 分). 棋盘是一个矩形单元格网格，单元格黑白相间染色，使得左上角单元格为黑色，且任意两个同色单元格不共用边. 两个棋盘不同当且仅当它们的行数或列数不同. 例如，一个 20×25 的棋盘和一个 25×20 的棋盘被视为不同的棋盘. 计算恰好有 41 个黑色单元格的不同棋盘的数量.

9 (7 分). 在正六边形 $ABCDEF$ 内部均匀且独立地随机选取点 P 和 Q. 计算线段 $\overline{PQ}$ 完全包含在四边形 $ABCD$、$BCDE$、$CDEF$、$DEFA$、$EFAB$ 或 $FABC$ 中至少一个内的概率.

10 (7 分). 一个边长为 1 的正方形被分割成两个全等的五边形. 计算其中一个五边形周长的最小上界.

11 (7 分). 设 $f(n)=n^2+100$. 计算 $\underbrace{f(f(\cdots f(f(1))\cdots))}_{2025\text{个}f}$ 除以 104 的余数.

12 (7 分). 霍尔顿有一组多边形. 他写下每个多边形的每个内角的度数，得到一个列表：30°、50°、60°、70°、90°、100°、120°、160° 和 x°，顺序不定. 计算 x 的值.

13 (9 分). 如果一个数的十进制数字从左到右是不减的，就称这个数是“递增数”. 计算小于 10^6 且既是“递增数”又是 11 的倍数的正整数的个数.

14 (9 分). 平行四边形 P 可以沿一条直线折叠，使得折叠后的图形是一个边长为 1 的正五边形. 计算平行四边形 P 的周长.

15 (9 分). 直角三角形 $\triangle DEF$ 中，$\angle D=90^\circ$，$\angle F=30^\circ$，它内接于等边三角形 $\triangle ABC$，使得 D、E、F 分别在线段 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上. 已知 $BD=7$，$DC=4$，计算 DE 的长度.

恩次方根
ENCIFANGGEN

16 (9 分). 康托集被定义为满足 $0 \le x < 1$ 且其三进制展开中不出现数字 1 的实数 x 的集合．从康托集中均匀且独立地随机选取两个数．计算它们差的绝对值的期望值．（形式上，从康托集中均匀随机选取一个数 x 的方法是：先从区间 $[0,1)$ 中均匀随机选取一个实数 y，将其写成二进制形式，把这些二进制数字当作三进制数字来读，然后令 x 为所得结果的 2 倍．）

17 (11 分). 设 f 是一个实系数二次多项式，$g_1, g_2, g_3, \cdots$ 是一个实数的等比数列．定义 $a_n = f(n) + g_n$．已知 a_1、a_2、a_3、a_4 和 a_5 分别等于 1、2、3、14 和 16，计算 $\dfrac{g_2}{g_1}$ 的值．

18 (11 分). 设 $f : \{1,2,3,\cdots,9\} \to \{1,2,3,\cdots,9\}$ 是从 9! 种可能的排列中均匀随机选取的一个排列．计算 $\underbrace{f(f(\cdots f}_{2025\text{个}f}(1))\cdots))$ 的期望值．

19 (11 分). 对于集合 $\{1,2,3,\cdots,2025\}$ 的子集 S，如果对于 S 中的任意元素 a 和 b，都存在 S 中的元素 c，使得 2025 能整除 $a+b-2c$，那么 S 就被称为平衡子集．计算非空平衡子集的数量．

20 (11 分). 在各位数字都小于 3 且是 7 的倍数的正整数中，求第 100 小的数．

21 (12 分). 计算唯一的 5 位正整数 $\overline{abcde}$，满足 $a \ne 0$，$c \ne 0$，且 $\overline{abcde} = (\overline{ab} + \overline{cde})^2$．（注：$\overline{ab}$ 表示由 a、b 组成的两位数，$\overline{cde}$ 同理）

22 (12 分). 设 a、b、c 为实数，满足 $a^2(b+c) = 1$，$b^2(c+a) = 2$，$c^2(a+b) = 5$．已知 abc 有三个可能的值，计算 abc 的最小可能值．

23 (12 分). 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2．圆 ω 在六边形内部，且与线段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AF}$ 相切．存在两条分别过 C 和 E 且与 ω 相切的垂线，且这两条直线不在直线 AD 上相交．计算圆 ω 的半径．

24 (12 分). 对于任意整数 x，设 $f(x) = 100!(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{100}}{100!})$．选取一个正整数 a，使得 $f(a) - 20$ 能被 101^2 整除．计算 $f(a+101)$ 除以 101^2 的余数．

25 (14 分). 设梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AD = 13$，$BC = 15$，$AB = 20$，$CD = 34$．点 X 在梯形内部，满足 $\angle XAB = 2\angle XBA$，$\angle XDC = 2\angle XCD$．计算 $XD - XA$ 的值．

26 (14 分). 伊莎贝拉有一个袋子，里面有 20 颗蓝色钻石和 25 颗紫色钻石．她重复以下过程 44 次：从袋子中均匀随机取出一颗钻石，然后再放入一颗蓝色钻石和一颗紫色钻石．计算 44 次操作后袋子中蓝色钻石数量的期望值．

27 (14 分). 计算有序对 (m,n) 的数量，其中 m、n 均为小于 80 的奇正整数，且

$$\gcd(4^m + 2^m + 1, 4^n + 2^n + 1) > 1.$$

28 (14 分). 设 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，满足 $f(0) = 0$，且对于所有正整数 m，有 $f(m) = f(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor) + \lceil \frac{m}{2} \rceil^2$．计算 $\dfrac{f(1)}{1\cdot 2} + \dfrac{f(2)}{2\cdot 3} + \dfrac{f(3)}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{f(31)}{31\cdot 32}$ 的值．（这里，$\lfloor z \rfloor$ 是不超过 z 的最大整数，$\lceil z \rceil$ 是不小于 z 的最小正整数．）

恩次方根
ENCIFANGGEN

29 (16 分). 点 A 和 B 在以 O 为圆心的圆 ω 上．设点 X 在圆 ω 内部，且 $XO=2\sqrt{2}$，$XA=1$，$XB=3$，$\angle AXB=90^\circ$．点 Y 和 Z 在圆 ω 上，且 $Y\neq A$，$\triangle AXB$ 和 $\triangle XYZ$ 顺相似．计算 XY 的长度．

30 (16 分). 设 a、b、c 为实数，满足方程组

$$\begin{cases} a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}=\dfrac{3}{4} \\ b\sqrt{1+c^2}+c\sqrt{1+b^2}=\dfrac{5}{12} \\ c\sqrt{1+a^2}+a\sqrt{1+c^2}=\dfrac{21}{20} \end{cases}$$

计算 a 的值．

31 (16 分). 存在唯一的一个圆，它既与抛物线 $y=x^2$ 相切于两点，又与曲线 $x=\sqrt{\dfrac{y^3}{1-y}}$ 相切．计算这个圆的半径．

32 (16 分). 在坐标平面中，长度为 $2n$ 的封闭格点回路是一个格点序列 $P_0,P_1,P_2,\cdots,P_{2n}$，其中 P_0 和 P_{2n} 均为原点，且对于每个 i，$P_iP_{i+1}=1$．从所有长度为 2026 的封闭格点回路中均匀随机选取一个．设 k 是使得直线 $x+y=k$ 至少经过回路中一个点的最大整数．计算满足 $0\le i\le 2025$ 且 P_i 在直线 ℓ 上的索引 i 的期望数量．（格点是坐标为整数的点．）

33 (20 分). 估计今年团体赛中各队提交的总页数．（与至少一个题目编号相关的所有页面都算作提交页面，即使是某个题目的空白封面页．）提交一个正整数 E．如果正确答案是 A，你将获得 $\max(0,\lfloor 20(1-(\frac{|E-A|}{100})^{\frac{3}{4}})\rfloor)$ 分．

34 (20 分). 在单位圆的周长上均匀且独立地随机选取 12 个点．估计由这些点构成的凸 12 边形的面积的期望值．提交一个用小数表示的正数 E．如果正确答案是 A，你将获得 $\mathrm{round}(20e^{-15|E-A|})$ 分．

35 (20 分). 如果一个 8 位数恰好使用 2 到 9 这 8 个数字各一次，就称它为“火烈鸟数”．估计“火烈鸟数”中质数的个数．提交一个正整数 E．如果正确答案是 A，你将获得 $\mathrm{round}(20\cdot\min(\frac{A}{E},\frac{E}{A})^{21})$ 分．

36 (20 分). 伊桑最初在黑板上写了一些数字，每个数字要么是 3，要么是 5．然后他反复选取两个数字，并用它们的和、差、积或商（除数不为 0 时）来替换它们．设 $f(n)$ 表示伊桑为了最终能写出数字 π，最初至少需要写的数字个数．例如，$f(2025)\le 6$，因为伊桑可以先在黑板上写 3、3、3、3、5 和 5，然后每次将两个数字相乘，最终可以得到 2025．按顺序提交一个由 8 个整数组成的逗号分隔的有序元组，对应 $f(164)$、$f(187)$、$f(191)$、$f(224)$、$f(255)$、$f(286)$、$f(374)$ 和 $f(479)$ 的值，对于你不想回答的任何值，可以用 X 代替．例如，如果你认为 $f(164)=9$ 且 $f(224)=8$，你应该提交“9, X, X, 8, X, X, X, X”．你将获得 $\left\lfloor 0.6^W\cdot\dfrac{(C+1)^2}{4}\right\rfloor$ 分，其中 C 是你提交的正确答案的数量，W 是你提交的错误（非空白）答案的数量．