证明多项式不可约

2023-10-30 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_947d84a8cdbafbac

解答（PDF 中已展开）

解答学生问的一道题，之前在 26 道多项式问题中已整理过此题。

证明多项式不可约

设 p 为素数. 求证: $f(x)=x^{p-1}+2x^{p-2}+\cdots+p$ 在有理数域上不可约.

证明 证明以下两个引理:

引理 1 若多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的所有系数均为正实数. 则 $f(x)$ 的所有复根 z 均满足 $|z|\geq\min\limits_{1\leq k\leq n}\dfrac{a_{k-1}}{a_k}$.

证明 若不然，设 $m=\min\limits_{1\leq k\leq n}\dfrac{a_{k-1}}{a_k}$，则存在某个 $f(x)$ 的复根 z 满足: 对任意 $1\leq k\leq n$，都有 $|z|<m$. 由 $f(z)=0$ 知: $(z-m)f(z)=0$，即

$$a_nz^{n+1}+(a_{n-1}-ma_n)z^n+\cdots+(a_0-ma_1)z-ma_0=0$$

于是

$$\begin{aligned}|ma_0|=&|a_nz^{n+1}+(a_{n-1}-ma_n)z^n+\cdots+(a_0-ma_1)z|\\ \leq&a_n|z^{n+1}|+(a_{n-1}-ma_n)|z^n|+\cdots+(a_0-ma_1)|z|\\ <&a_nm^{n+1}+(a_{n-1}-ma_n)m^n+\cdots+(a_0-ma_1)m\\ =&ma_0\end{aligned}$$

矛盾，于是引理 1 证毕.

引理 2 $f(x)$ 为首一的整系数多项式，若 $f(x)$ 的所有复根模长均大于 1，且 $|f(0)|$ 为素数，则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

证明 由高斯引理，只需证 $f(x)$ 在整数域上不可约.
若不然，设 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $g(x),h(x)$ 均为整系数多项式.
由 $|f(0)|=|g(0)|\cdot|h(0)|$ 为素数，可不妨设 $|g(0)|=1$.
设 $g(x)$ 的所有复根为 $z_1,z_2,\cdots,z_k$，由韦达定理:

$$|g(0)|=|z_1z_2\cdots z_k|=|z_1|\cdots|z_k|>1$$

矛盾，于是 $f(x)$ 在有理数域上不可约，引理 2 证毕.

回到原题，对 $f(x)=x^{p-1}+2x^{p-2}+\cdot+p$，由引理 1 知，$f(x)$ 的所有复根 z 均满足

$$|z|\geq\min_{1\leq k\leq p-1}\frac{p+1-k}{p-k}=\frac{p}{p-1}>1$$

又 $|f(0)=p$ 为素数，由引理 2 知 $f(x)$ 在有理数域上不可约，证毕.

2

证明多项式不可约

设 p为素数. 求证：$f(x)=x^{p-1}+2x^{p-2}+\cdots+p$在有理数域上不可约.

证明以下两个引理:

若多项式 $f(x)=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{0}$的所有系数均为正实数. 则 $f(x)$的所有复根 z均满足 $|z|\ge \min\limits_{1\le k\le n}\dfrac{a_{k-1}}{a_{k}}$.

若不然，设 $m=\min\limits_{1\le k\le n}\dfrac{a_{k-1}}{a_{k}}$，则存在某个 $f(x)$的复根 z满足：对任意 $1\le k\le n$，都有 $|z|<m$. 由 $f(z)=0$知：$(z-m)f(z)=0$，即 $$a_{n}z^{n+1}+(a_{n-1}-ma_{n})z^{n}+\cdots+(a_{0}-ma_{1})z-ma_{0}=0$$于是 $$\begin{aligned}|ma_{0}|=&|a_{n}z^{n+1}+(a_{n-1}-ma_{n})z^{n}+\cdots+(a_{0}-ma_{1})z|\\\le&a_{n}|z^{n+1}|+(a_{n-1}-ma_{n})|z^{n}|+\cdots+(a_{0}-ma_{1})|z|\\<&a_{n}m^{n+1}+(a_{n-1}-ma_{n})m^{n}+\cdots+(a_{0}-ma_{1})m\\=&ma_{0}\end{aligned}$$矛盾，于是引理 1 证毕.

$f(x)$为首一的整系数多项式，若 $f(x)$的所有复根模长均大于 1，且 $|f(0)|$为素数，则 $

f(x)$在有理数域上不可约.

由高斯引理，只需证 $f(x)$在整数域上不可约.
若不然，设 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $g(x),h(x)$均为整系数多项式.
由 $| f(0)|=| g(0)|\cdot | h(0)|$为素数，可不妨设 $| g(0)|=1$.
设 $g(x)$的所有复根为 $z_{1},z_{2},\cdots,z_{k}$，由韦达定理：$$| g(0)|=| z_{1}z_{2}\cdots z_{k}|=| z_{1}|\cdots| z_{k}|>1$$矛盾，于是 $f(x)$在有理数域上不可约，引理 2 证毕.

回到原题，对 $f(x)=x^{p-1}+2x^{p-2}+\cdot+p$，由引理 1 知，$f(x)$的所有复根 z均满足 $$| z|\ge\min\limits_{1\le k\le p-1}\dfrac{p+1-k}{p-k}=\dfrac{p}{p-1}>1$$又 $| f(0)=p$为素数，由引理 2 知 $f(x)$在有理数域上不可约，证毕.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{证明多项式不可约}设$p$为素数. 求证：$f(x)=x^{p-1}+2x^{p-2}+\cdots+p$在有理数域上不可约.
\begin{proof}证明以下两个引理：
\begin{lemma}若多项式$f(x)=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{0}$的所有系数均为正实数.
则$f(x)$的所有复根$z$均满足$|z|\ge \min\limits_{1\le k\le n}\dfrac{a_{k-1}}{a_{k}}$. \end{lemma}\begin{proof}若不然，
设$m=\min\limits_{1\le k\le n}\dfrac{a_{k-1}}{a_{k}}$，则存在某个$f(x)$的复根$z$满足：对任意$1\le k\le n$，都有$|z|<m$.
由$f(z)=0$知：$(z-m)f(z)=0$，即$$a_{n}z^{n+1}+(a_{n-1}-ma_{n})z^{n}+\cdots+(a_{0}-ma_{1})z-ma_{0}=0$$于是$$\begin{a
ligned}|ma_{0}|=&|a_{n}z^{n+1}+(a_{n-1}-ma_{n})z^{n}+\cdots+(a_{0}-ma_{1})z|\\\le&a_{n}|z^{n+1}|+(a_{n-1}-ma_{n})|z^{n}|+
\cdots+(a_{0}-ma_{1})|z|\\<&a_{n}m^{n+1}+(a_{n-1}-ma_{n})m^{n}+\cdots+(a_{0}-ma_{1})m\\=&ma_{0}\end{aligned}$$矛盾，
于是引理1证毕. \end{proof}\newpage\begin{lemma}$f(x)$为首一的整系数多项式，若$f(x)$的所有复根模长均大于$1$，
且$|f(0)|$为素数，则$f(x)$在有理数域上不可约. \end{lemma}\begin{proof}由高斯引理，只需证$f(x)$在整数域上不可约.
\\若不然，设$f(x)=g(x)h(x)$，其中$g(x),h(x)$均为整系数多项式. \\由$|f(0)|=|g(0)|\cdot |h(0)|$为素数，可不妨设$|g(0)|=1$.
\\设$g(x)$的所有复根为$z_{1},z_{2},\cdots,z_{k}$，由韦达定理：$$|g(0)|=|z_{1}z_{2}\cdots
z_{k}|=|z_{1}|\cdots|z_{k}|>1$$矛盾，于是$f(x)$在有理数域上不可约，引理2证毕. \end{proof}回到原题，
对$f(x)=x^{p-1}+2x^{p-2}+\cdot+p$，由引理1知，$f(x)$的所有复根$z$均满足$$|z|\ge\min\limits_{1\le k\le
p-1}\dfrac{p+1-k}{p-k}=\dfrac{p}{p-1}>1$$又$|f(0)=p$为素数，由引理2知$f(x)$在有理数域上不可约，证毕. \end{proof}
```