两行解答南京大学强基计划一题及类似一题

2024-06-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9591017fb46bcc24

题目 1：（2024 年南京大学强基计划）

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$b>a$，$a,b,c\in\mathbb{R}$，$\forall x\in\mathbb{R}$，有 $f(x)\geq 0$. 求 $\dfrac{b-a}{a+b+c}$ 的最大值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

由 $f(-2)=4a-2b+c\geq 0$ 知 $0<3(b-a)\leq a+b+c$，因此 $\dfrac{b-a}{a+b+c}\leq\dfrac{1}{3}$.

$a=1,b=-4,c=4$ 时等号成立，故最大值为 $\dfrac{1}{3}$.

题目 2：

$f(x)=a\cos x+b\cos 2x\geq -1$ 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立，求 $a+b$ 的最大值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

$f(\dfrac{2\pi}{3})=-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}b\geq -1$，故 $a+b\leq 2$.

$a=\dfrac{4}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$ 时，$f(x)+1=\dfrac{(2\cos x+1)^2}{3}\geq 0$，故 $a+b$ 的最大值为 2.

（其实都是隐藏了凑系数的过程。）