从女儿的桌游想到的两道集合问题

2021-04-07　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_95a41a733c98bd66

晚上陪女儿玩了她喜爱的桌游 Crazy Matching（疯狂对对对）.



核心规则比较简单，就是找出任意两张卡片里的相同图案，玩家人数不同时玩法略有不同.

在玩过几次之后，我发现任意两张卡片上相同的图案恰好是一个，这样能在保证一定难度的同时避免无解的情况出现. 于是我想到了一道集合中的经典题目，为了确认自己的想法，我拿出说明书把游戏中的元素重新确认了一遍.

这个桌游中共有 57 个不同的图案，54 张卡片，其中每张卡片上有 8 个不同的图案.

首先想到的是这样一道题（出自 matrix67 博客）:

题目 1 在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中选取尽可能多的子集，使得任意两个子集的交集有且仅有一个元素.

用一些较小的 n 简单尝试之后发现此题答案恰好为 n. 下面进行证明.

解答（PDF 中已展开）

证明考虑每个子集所对应的 n 维 01 向量，容易看出，两个子集的交集的元素个数恰为其对应向量的内积. 下面证明：满足要求的一组子集所对应的向量一定是线性无关的，从而直接得到向量个数不超过 n 的结论.

记 m 个子集 A_1, A_2, $\cdots$, A_m 所对应的向量分别为 $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\cdots$, $\vec{v_m}$. 于是对于 $i\neq j$, $\vec{v_i}\cdot\vec{v_j}=1$. 以及 $\vec{v_i}\cdot\vec{v_i}=|A_i|$.

令 $\vec{s}=\sum_{i=1}^{m}a_i\vec{v_i}$ 为 $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\cdots$, $\vec{v_m}$ 的任意一个线性组合.

于是

$$\begin{aligned}\vec{s}\cdot\vec{s}=&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_ia_j(\vec{v_i}\cdot\vec{v_j})\\=&(\sum_{i=1}^{m}a_i)^2+\sum_{i=1}^{m}a_i^2(|A_i|-1)\end{aligned}$$

当 $\vec{s}=\sum_{i=1}^{m}a_i\vec{v_i}=0$ 时，$\vec{s}\cdot\vec{s}=0$. 而上式的每一项均为非负，故只能是所有的 a_i 均为 0. 由此证明这 m 个向量线性无关.

思考了一会，我发现两个问题其实并不完全一致. 一方面，上面的题目中对每个子集的元素个数未作要求，而每张卡片上的图案均为 8. 是否因为加上了每个子集元素个数均相同这一条件，导致了卡片数量为 54（略少于图案数量 57）这一结果？于是有了以下的问题.

题目 2 有 54 个 8 元集合，其中任意两个集合的交集恰有一个元素，则这些集合的并集至少有几个元素?

解答（PDF 中已展开）

分析

首先考虑最简单的情况，即所有集合均有一个相同的元素，而其余元素均不同. 此时所有集合的并集有 $1+54\times7=379$ 个元素，这显然不是最佳的.

如果存在某个集合（不妨设为 A_0），有 $a_1,a_2,\cdots,a_k\in A_1$（$k\geq2$），使得 a_1，a_2，$\cdots$，a_k 还在其它集合中. 不妨设 a_1 所在的集合（除 A_0 外）个数是最多的，记为 s. 下证：$s\leq7$.

设这 s 个集合为 A_1，A_2，$\cdots$，A_s. 考虑某个 a_2 所在的集合（不妨设为 A_{s+1}）. 由于 A_{s+1} 与 A_1，A_2，$\cdots$，A_s 均有一个公共元素，而 A_1，A_2，$\cdots$，A_s 均不含 a_1 以外的公共元素，A_{s+1} 中还有 7 个剩余元素. 于是 $s\leq7$.

将除 A_0 外的 53 个集合按照与 A_0 的公共元素分为 8 组，每一组的集合个数均不超过 7. 容易知道其中至少有一组恰好有 7 个集合. 这 7 个集合与 A_0 有同一个公共元素.

因此这些集合的并集元素个数至少为 $8+7\times7=57$.

构造略.