2022 年巴西数学奥林匹克

2022-11-23 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_95a8aad84d0064bd

第一天

一个单人游戏的规则如下：起初，有 10 堆石子，每堆各有 $1, 2, \cdots, 10$ 枚石子．每次进行以下操作之一：
(i) 选择两堆石子数不少于 2 的石子，将它们合并，并在新石堆中再放入 2 枚石子；
(ii) 选择一堆石子数不少于 4 的石子，从里面取出 2 枚石子，再将它分成两堆，每堆的石子数由玩家决定．
当无法执行任何操作时，游戏结束．证明：不论之前怎么执行操作，在游戏结束时，总有两堆石子数量相同．

在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB < AC$．设 K 为外接圆上弧 BC（不含点 A）的中点，P 为边 BC 的中点．I_B、I_C 分别为 $\triangle ABC$ 的 B 所对的旁心、C 所对的旁心．点 Q 为 K 关于 A 的对称点．求证：P、Q、I_B、I_C 四点共圆．

设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为整数列．对任意非负整数 n，记 $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n$，$\Delta^M a_n = \Delta^{M-1} a_{n+1} - \Delta^{M-1} a_n$．称数列是“爱国”的，若存在正整数 k、l，使得对任意非负整数 n，都有 $a_{n+k} = \Delta^M a_{n+l}$．确定并证明：是否存在一个数列，满足使该数列为“爱国”的 M 的最大值为 2022．

第二天

1. 起初，黑板上写有一个自然数 n．每一分钟，内马尔选取 n 的一个约数 d（$d > 1$），擦去 n，然后写上 $n + d$．如果开始黑板上的数为 2022，那么内马尔永远无法在黑板上写出的最大合数是多少？

2. 设 n 为一个正整数．定义 $S(n)$ 为满足如下条件的最小正整数：$S(n) \equiv n \pmod 2$，$S(n) \geq n$，并且不存在正整数 $k, x_1, x_2, ..., x_k$ 使得 $n = x_1 + x_2 + ... + x_k$ 且 $S(n) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2$．证明：存在一个实常数 $c > 0$ 和一个正整数 n_0，使得对于所有 $n \geq n_0$，都有 $S(n) \geq cn^{\frac{3}{2}}$．

3. 10×10 方格网中的一些单元格被涂成了蓝色．称一组六个单元格为“天才”的，如果它们是三行两列或两行三列的交集，并被全涂成蓝色．确定 n 的最大值，使得有可能方格网中的 n 格涂成蓝色，而不存在一个“天才”集．

点击“阅读原文”可讨论试题。