2016 年浙江高考第 8 题的分析

2023-03-04　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_95e51ffd3aba8a74

昨天宋老师分享了 2016 年的浙江高考的第 8 题，这里分享一下我的做法.

已知实数 a，b，c.
(A) 若 $|a^2+b+c|+|a+b^2+c|\leq 1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$
(B) 若 $|a^2+b+c|+|a^2+b-c|\leq 1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$
(C) 若 $|a+b+c^2|+|a+b-c^2|\leq 1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$
(D) 若 $|a^2+b+c|+|a+b^2-c|\leq 1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$

优先考虑取特殊值来做排除。核心想法是让条件的两个绝对值内的数接近于 0，而平方和尽可能大。（本题中的 1 和 100 其实只代表一个比较小的数和比较大的数，并无实际意义，想到这一点本题就不难了）

对选项 (A)，令

$$\begin{cases} a^2+b+c=0 \\ a+b^2+c=0 \end{cases}$$

故 $a^2+b=a+b^2$，取 $a=b$，$c=-(a^2+a)$ 即可满足条件. 但此时 $|a|$ 可以任意大，比如取 $a=b=10$，$c=-110$ 即得矛盾.

对选项 (B)，令

$$\begin{cases} a^2+b+c=0 \\ a^2+b-c=0 \end{cases}$$

故 $a^2+b=c=0$，同样的，取 $a=10$，$b=-100$，$c=0$ 即得矛盾.

对选项 (C)，令

$$\begin{cases} a+b+c^2=0 \\ a+b-c^2=0 \end{cases}$$

故 $a+b=c=0$，同样的，取 $a=10$，$b=-10$，$c=0$ 即得矛盾.

此时已经可以由排除法选出答案 (D) 了，但我们还是来看看 (D) 的不同之处.

对选项 (D)，令

$$\begin{cases} a^2+b+c=0 \\ a+b^2-c=0 \end{cases}$$

故 $a^2+b+a+b^2=0$（注意到这和 (A) 的不同）. 即 $(a+\frac{1}{2})^2+(b+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$，这说明此时 a 和 b 有界，从而 c 也有界，无法再像之前那样取特殊值得到矛盾了.

下面我们来证明 (D) 成立.

先将条件进行化简，主要是去绝对值.

注意到 $|x|+|y|\leq 1$ 表示的是由四条直线 $x+y=\pm 1$ 和 $x-y=\pm 1$ 所围成的正方形内部区域.

于是 (D) 的条件等价于

$$\begin{cases} -1\leq (a^2+b+c)+(a+b^2-c)\leq 1 \\ -1\leq (a^2+b+c)-(a+b^2-c)\leq 1 \end{cases}$$

由第一个式子知：

$$(a+\frac{1}{2})^2+(b+\frac{1}{2})^2\leq \frac{3}{2}$$

于是 $(a+\frac{1}{2})^2\leq \frac{3}{2}$，即 $|a|\leq \sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}<2$（随便估个界），同理 $|b|<2$.

由两个式子相加知：$-1\leq a^2+b+c\leq 1$，即 $|c|\leq 1+a^2+|b|<7$，于是 $a^2+b^2+c^2<57$，证毕.