2021 年普林斯顿数学竞赛（PUMaC）数论组

2022-04-16　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_95fcbfd7978b46dd

A 组

1. 求 $2^{3^5}+3^{5^2}+5^{2^3}$ 除以 30 的余数.
2. 数字 n 的子串为从 n 的开头和结尾删去一些数字所形成的新数字（可以在两侧删去不同数量的数字）. 求所有满足如下性质的素数 p 之和：p 的所有子串仍为素数.
3. 求不定方程 $x^2+y^2=32045$ 的非负整数解.
4. 设 $f(n)=\sum\limits_{\gcd(k,n)=1,1\le k\le n} k^3$，设 $f(2020)$ 的质因数分解形式为 $p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$，求 $\sum\limits_{i=1}^{k} p_ie_i$ 的值.
5. 设函数 $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ 满足对任意整数 x，y，都有 $f(x,y)=f(3x+y,2x+2y)$. 求 $1\le x,y\le 100$ 时，$f(x,y)$ 所能取得的不同值个数的最大值.
6. 设 $f(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\gcd(i,n)}{n}$，求所有使得 $f(n)=6$ 的正整数 n 之和.
7. 若多项式 p 满足对任意整数 x 和 y，$y-x\mid p(y)-p(x)$，且对任意整数 x，$p(x)$ 均为整数，则称 p 是“尊敬的”. 若一个“尊敬的”非零多项式的所有非零系数都在 $(0,1)$ 之间，则称其是“伪装的”. 求 $\sum\deg(f)\cdot f(2)$，其中 f 取遍所有次数不超过 5 的伪装的多项式.
8. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_0=3$，对任意 $i\ge 1$，$a_i=2^{a_i-1}+1$. 设 m 为满足 $a_3^3\mid a_m$ 的最小整数，m' 为满足 $a_m^3\mid a_{m'}$ 的最小整数. 求 m' 的值.

B 组

1. Andrew 有一个四位数，且最后一位为 2. 已知这个数能被 9 整除，求这个四位数的所有可能取值的个数. 注意到首位数字不能为 0.
2. 正整数 n 的最小三个正约数分别为 $d_1<d_2<d_3$，且满足 $d_1+d_2+d_3=57$. 求 d_2 的所有可能取值之和.
3. 同 A 组第 1 题
4. 同 A 组第 2 题
5. 同 A 组第 3 题
6. 同 A 组第 4 题
7. 同 A 组第 5 题
8. 同 A 组第 6 题