遇事不决，待定系数

2026-05-05　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_96690590d5432f8d

这是两年前在 B 站上发的一道题，难度不大，但前段时间有人问局部不等式是怎么想到的。五一期间正好又给学生讲了这题，于是写一下这个局部的产生。

本文由数智笔记软件完成排版，感谢宋老师的开发团队！

题目：

正整数 $n\geqslant 2$，实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[1,2]$. 求证：

$$3\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k+1}|+\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k+2}|\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

思路分析：

待定系数，将不等式两边都写为含 x_k,x_{k+1},x_{k+2} 三项的求和形式.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(\alpha|x_k-x_{k+1}|+(3-\alpha)|x_{k+1}-x_{k+2}|+|x_k-x_{k+2}|)\\ \leqslant&\sum_{k=1}^{n}(\beta x_k+\gamma x_{k+1}+(2-\beta-\gamma)x_{k+2})\end{aligned}$$

于是只需证明局部不等式：

对 $a,b,c\in[1,2]$，有

$$\alpha|a-b|+(3-\alpha)|b-c|+|a-c|\leqslant\beta a+\gamma b+(2-\beta-\gamma)c.$$

注意到不等式关于 a,b,c 都是线性的，只需验证 $a,b,c\in\{1,2\}$ 的情况即可，其中 $a=b=c$ 时，不等式恒成立，下面考虑其余六种情况：

$$\begin{cases}\alpha\cdot 0+(3-\alpha)\cdot 1+1\leqslant\beta\cdot 1+\gamma\cdot 1+(2-\beta-\gamma)\cdot 2\\ \alpha\cdot 1+(3-\alpha)\cdot 1+0\leqslant\beta\cdot 1+\gamma\cdot 2+(2-\beta-\gamma)\cdot 1\\ \alpha\cdot 1+(3-\alpha)\cdot 0+1\leqslant\beta\cdot 1+\gamma\cdot 2+(2-\beta-\gamma)\cdot 2\\ \alpha\cdot 1+(3-\alpha)\cdot 0+1\leqslant\beta\cdot 2+\gamma\cdot 1+(2-\beta-\gamma)\cdot 1\\ \alpha\cdot 1+(3-\alpha)\cdot 1+0\leqslant\beta\cdot 2+\gamma\cdot 1+(2-\beta-\gamma)\cdot 2\\ \alpha\cdot 0+(3-\alpha)\cdot 1+1\leqslant\beta\cdot 2+\gamma\cdot 2+(2-\beta-\gamma)\cdot 1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\beta+\gamma\leqslant\alpha\\ \gamma\geqslant 1\\ \alpha+\beta\leqslant 3\\ \alpha\leqslant\beta+1\\ \gamma\leqslant 1\\ \alpha+\beta+\gamma\geqslant 2\end{cases}\iff\begin{cases}\gamma=1\\ \alpha=\beta+1\\ 0\leqslant\beta\leqslant 1\end{cases}$$

任取一组 (α,β,γ) 即可完成证明.

题目：

正整数$n\geqslant 2$，实数$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[1,2]$．求证：

$$3\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k+1}|+\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k+2}|\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

思路分析：

待定系数，将不等式两边都写为含x_k,x_{k+1},x_{k+2}三项的求和形式．

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(\alpha|x_k-x_{k+1}|+(3-\alpha)|x_{k+1}-x_{k+2}|+|x_k-x_{k+2}|)\\\leqslant&\sum_{k=1}^{n}(\beta x_k+\gamma x_{k+1}+(2-\beta-\gamma)x_{k+2})\end{aligned}$$

于是只需证明局部不等式：

对$a,b,c\in[1,2]$，有

$$\alpha|a-b|+(3-\alpha)|b-c|+|a-c|\leqslant\beta a+\gamma b+(2-\beta-\gamma)c.$$

注意到不等式关于a,b,c都是线性的，只需验证$a,b,c\in\{1,2\}$的情况即可，其中$a=b=c$时，不等式恒成立，下面考虑其余六种情况：

$$\begin{cases}\alpha\cdot0+(3-\alpha)\cdot1+1\leqslant\beta\cdot1+\gamma\cdot1+(2-\beta-\gamma)\cdot2\\\alpha\cdot1+(3-\alpha)\cdot1+0\leqslant\beta\cdot1+\gamma\cdot2+(2-\beta-\gamma)\cdot1\\\alpha\cdot1+(3-\alpha)\cdot0+1\leqslant\beta\cdot1+\gamma\cdot2+(2-\beta-\gamma)\cdot2\\\alpha\cdot1+(3-\alpha)\cdot0+1\leqslant\beta\cdot2+\gamma\cdot1+(2-\beta-\gamma)\cdot1\\\alpha\cdot1+(3-\alpha)\cdot1+0\leqslant\beta\cdot2+\gamma\cdot1+(2-\beta-\gamma)\cdot2\\\alpha\cdot0+(3-\alpha)\cdot1+1\leqslant\beta\cdot2+\gamma\cdot2+(2-\beta-\gamma)\cdot1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\beta+\gamma\leqslant\alpha\\\gamma\geqslant1\\\alpha+\beta\leqslant3\\\alpha\leqslant\beta+1\\\gamma\leqslant1\\\alpha+\beta+\gamma\geqslant2\end{cases}\iff\begin{cases}\gamma=1\\\alpha=\beta+1\\0\leqslant\beta\leqslant1\end{cases}$$

任取一组(α,β,γ)即可完成证明．

图片版：

题目：

正整数$n\geqslant 2$，实数$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[1,2]$．求证：

$$3\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k+1}|+\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k+2}|\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

思路分析：

待定系数，将不等式两边都写为含x_k,x_{k+1},x_{k+2}三项的求和形式．

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(\alpha|x_k-x_{k+1}|+(3-\alpha)|x_{k+1}-x_{k+2}|+|x_k-x_{k+2}|)\\\leqslant&\sum_{k=1}^{n}(\beta x_k+\gamma x_{k+1}+(2-\beta-\gamma)x_{k+2})\end{aligned}$$

于是只需证明局部不等式：

对$a,b,c\in[1,2]$，有

$$\alpha|a-b|+(3-\alpha)|b-c|+|a-c|\leqslant\beta a+\gamma b+(2-\beta-\gamma)c.$$

注意到不等式关于a,b,c都是线性的，只需验证$a,b,c\in\{1,2\}$的情况即可，其中$a=b=c$时，不等式恒成立，下面考虑其余六种情况：

$$\begin{cases}\alpha\cdot0+(3-\alpha)\cdot1+1\leqslant\beta\cdot1+\gamma\cdot1+(2-\beta-\gamma)\cdot2\\\alpha\cdot1+(3-\alpha)\cdot1+0\leqslant\beta\cdot1+\gamma\cdot2+(2-\beta-\gamma)\cdot1\\\alpha\cdot1+(3-\alpha)\cdot0+1\leqslant\beta\cdot1+\gamma\cdot2+(2-\beta-\gamma)\cdot2\\\alpha\cdot1+(3-\alpha)\cdot0+1\leqslant\beta\cdot2+\gamma\cdot1+(2-\beta-\gamma)\cdot1\\\alpha\cdot1+(3-\alpha)\cdot1+0\leqslant\beta\cdot2+\gamma\cdot1+(2-\beta-\gamma)\cdot2\\\alpha\cdot0+(3-\alpha)\cdot1+1\leqslant\beta\cdot2+\gamma\cdot2+(2-\beta-\gamma)\cdot1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\beta+\gamma\leqslant\alpha\\\gamma\geqslant1\\\alpha+\beta\leqslant3\\\alpha\leqslant\beta+1\\\gamma\leqslant1\\\alpha+\beta+\gamma\geqslant2\end{cases}\iff\begin{cases}\gamma=1\\\alpha=\beta+1\\0\leqslant\beta\leqslant1\end{cases}$$

任取一组(α,β,γ)即可完成证明．