2022 年 IMO 预选题 A5 另解（其实更像组合题）

2023-10-09 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9800e2703689e8b7

问题.（2022 年 IMO 预选题 A5） 求所有的整数 $n \geq 2$，使得存在正实数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 和正实数 r，满足

$$\{a_j - a_i \mid 1 \leq i < j \leq n\} = \{r, r^2 \cdots, r^{n(n-1)/2}\}.$$

解 对 $1 \leq k \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$，设闭区间 $I_k = [a_i, a_j]$，其中 $a_j - a_i = r^k$. 不妨设 $r > 1$，否则用 $a_i r^{-n(n-1)/2-1}$ 代替 a_i，r^{-1} 代替 r，结论依然成立.

引理 对 $1 \leq k \leq \dfrac{n(n-1)}{2} - 1$，都有 $I_k \cap I_{k+1} \neq \varnothing$.

证明 若不然，设 $a_{p_1} < a_{p_2} < a_{q_1} < a_{q_2}$，使得

$$\{a_{p_2} - a_{p_1}, a_{q_2} - a_{q_1}\} = \{r^k, r^{k+1}\}.$$

不妨设 $a_{p_2} - a_{p_1} = r^k$，$a_{q_2} - a_{q_1} = r^{k+1}$，否则可取 $A > \max\limits_{1 \leq i \leq n} a_i$，用 $\{A - a_i\}$ 代替 $\{a_i\}$，结论依然成立. 设 $a_{q_1} - a_{p_2} = r^\alpha$，$a_{q_1} - a_{p_1} = r^\beta = r^k + r^\alpha$，于是

$$a_{q_2} - a_{p_2} = r^{k+1} + r^\alpha > r^k + r^\alpha = r^\beta$$

$$a_{q_2} - a_{p_2} = r^{k+1} + r^\alpha < r^{k+1} + r^{\alpha+1} = r^{\beta+1}$$

而 r^β 和 $r^{\beta+1}$ 之间不再有 r 的正整数次幂，矛盾！故引理 1 得证.

1

在引理中，取 $k=1$ 得 $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$，而 I_1 区间长度是最短的，故 I_1 的左右端点必为相邻的 a_i，即 $I_1=[a_i,a_{i+1}]$. 若 I_2 的左右端点不相邻，则 I_2 必有一个异于 I_1 的子区间 I_k，矛盾！于是 I_1 和 I_2 恰有一个公共端点.

设 k_0 为满足如下要求的区间链 $I_1, I_2, \cdots, I_k$ 的长度 k 的最大值：

- $I_1, I_2, \cdots, I_k$ 在数轴上按顺序排列；
- $I_1 \cap I_2, I_2 \cap I_3, \cdots, I_{k-1} \cap I_k$ 均为单元素集.

由于 $I_1 \cap I_2$ 为单元素集，因此 k_0 存在，且至少为 2. 设 $I_j=[b_j,c_j]$，$1 \leq j \leq k$. 容易知道不存在 $b_j < d_j < c_j$，否则 $[b_j,d_j]$ 早于 I_j 出现. 即 $I_1, I_2, \cdots, I_k$ 的左右端点均相邻.

考察 I_{k+1}，由上知，I_{k+1} 有两种情况：

(1) $I_k \cap I_{k+1}$ 不为单元素集，而 I_k 的左右端点相邻，故 $I_k \subseteq I_{k+1}$，进一步地，有 $I_{k+1}=I_k \cup I_{k-1}$，因此 $r^{k+1}=r^k+r^{k-1}$. （否则能找到一个更小的且未出现的区间）

(2) $I_k \cap I_{k+1}$ 为单元素集，但与前面的区间不为顺次排列. 此时有 $I_{k-1} \subseteq I_{k+1}$，同上可知 $I_{k+1}=I_{k-2} \cup I_{k-1}$，因此 $r^{k+1}=r^{k-2}+r^{k-1}$.

2

综上，$r^2-r-1=0$ 或 $r^3-r-1=0$.

(1) r 为 $x^2-x-1=0$ 的正根. 设 $a_{t+1}-a_t=r$, $a_{t+2}-a_{t+1}=r^2$, 则 $a_{t+2}-a_t=r+r^2=r^3$. 若 $n\geq 4$, 必有 $a_{t+3}=a_{t+2}+r^4$ 或 $a_{t-1}=a_t-r^4$.

- 若为前者, 则 $a_{t+3}-a_{t+1}=r^4+r^2=4r+3$ 不为 r 的正整数次幂.
- 若为后者, 则 $a_{t+1}-a_{t-1}=r^4+r=4r+1$ 不为 r 的正整数次幂.

于是 $n\leq 3$.

(2) r 为 $x^3-x-1=0$ 的正根. 设 $a_{t+1}-a_t=r$, $a_{t+2}-a_{t+1}=r^2$. 则 $I_3=[a_{t+1}-r^3,a_{t+1}]$, 或 $I_3=[a_{t+2},a_{t+2}+r^3]$.

- 若为前者, 则 $a_t-(a_{t+1}-r^3)=r^3-r=2r+1$ 不为 r 的正整数次幂.
- 若为后者, 则此时 $a_{t+2}-a_t=r^2+r=r^4$, $a_{t+3}-a_{t+1}=r^3+r^2=r^5$, $a_{t+3}-a_t=r^3+r^4=r^6$.

  若 $n\geq 5$, 则 $a_{t+4}=a_{t+3}+r^7$ 或 $a_{t-1}=a_t-r^7$. 同上可以证明矛盾.

于是 $n\leq 4$.

3

由此也能给出 $n=2,3,4$ 的构造:

(1) $n=2$ 时，取 $r=a_2-a_1\in\mathbb{R}_+$;

(2) $n=3$ 时，取 $r=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ ($x^2-x-1=0$ 的正根)，令 $a_2-a_1=r$，$a_3-a_2=r^2$.

(3) $n=4$ 时，取 r 为 $x^3-x-1=0$ 的正根，令 $a_2-a_1=r$，$a_3-a_2=r^2$，$a_4-a_3=r^3$，则 $a_3-a_1=r^4$，$a_4-a_2=r^5$，$a_4-a_1=r^6$.

于是满足题意的 n 为 $2,3,4$.

4

1. **(2022 年 IMO 预选题 A5)**求所有的整数 $n\ge 2$, 使得存在正实数 $a_{1}<a_{2}<\cdots<a_{n}$和正实数 r，满足 $$\{a_{j}-a_{i}\mid 1\le i<j\le n\}=\{r,r^{2}\cdots,r^{n(n-1)/2}\}.$$

对 $1\le k\le \frac{n(n-1)}{2}$, 设闭区间 $I_{k}=[a_{i},a_{j}]$, 其中 $a_{j}-a_{i}=r^{k}$. 不妨设 $r>1$，否则用 $a_{i}r^{-n(n-1)/2-1}$代替 a_{i}，r^{-1}代替 r，结论依然成立.

对 $1\le k\le \frac{n(n-1)}{2}-1$，都有 $I_{k}\cap I_{k+1}\neq \varnothing$.

若不然，设 $a_{p_{1}}<a_{p_{2}}<a_{q_{1}}<a_{q_{2}}$，使得 $$\{a_{p_{2}}-a_{p_{1}},a_{q_{2}}-a_{q_{1}}\}=\{r^{k},r^{k+1}\}.$$ 不妨设 $a_{p_{2}}-a_{p_{1}}=r^{k}$，$a_{q_{2}}-a_{q_{1}}=r^{k+1}$，否则可取 $A>\max_{1\le i\le n} a_{i}$，用 $\{A-a_{i}\}$代替 $\{a_{i}\}$，结论依然成立. 设 $a_{q_{1}}-a_{p_{2}}=r^{\alpha}$，$a_{q_{1}}-a_{p_{1}}=r^{\beta}=r^{k}+r^{\alpha}$，于是 $$a_{q_{2}}-a_{p_{2}}=r^{k+1}+r^{\alpha}>r^{k}+r^{\alpha}=r^{\beta}$$$$a_{q_{2}}-a_{p_{2}}=r^{k+1}+r^{\alpha}<r^{k+1}+r^{\alpha+1}=r^{\beta+1}$$而 r^{β}和 $r^{\beta+1}$之间不再有 r的正整数次幂，矛盾！故引理 1 得证.

在引理中，取 $k=1$得 $I_{1}\cap I_{2}\neq\varnothing$，而 I_{1}区间长度是最短的，故 I_{1}的左右端点必为相邻的 a_{i}，即 $I_{1}=[a_{i},a_{i+1}]$. 若 I_{2}的左右端点不相邻，则 I_{2}必有一个异于 I_{1}的子区间 I_{k}，矛盾！于是 I_{1}和 I_{2}恰有一个公共端点. 设 k_{0}为满足如下要求的区间链 $I_{1},I_{2},\cdots,I_{k}$的长度 k的最大值：

- $I_{1},I_{2},\cdots,I_{k}$在数轴上按顺序排列；
- $I_{1}\cap I_{2},I_{2}\cap I_{3},\cdots,I_{k-1}\cap I_{k}$均为单元素集.

由于 $I_{1}\cap I_{2}$为单元素集，因此 k_{0}存在，且至少为 2. 设 $I_{j}=[b_{j},c_{j}]$，$1\le j\le k$. 容易知道不存在 $b_{j}<d_{j}<c_{j}$，否则 $[b_{j},d_{j}]$早于 I_{j}出现. 即 $I_{1},I_{2},\cdots,I_{k}$的左右端点均相邻. 考察 I_{k+1}，由上知，I_{k+1}有两种情况：

1. $I_{k}\cap I_{k+1}$不为单元素集，而 I_{k}的左右端点相邻，故 $I_{k}\subseteq I_{k+1}$，进一步地，有 $I_{k+1}=I_{k}\cup I_{k-1}$，因此 $r^{k+1}=r^{k}+r^{k-1}$.（否则能找到一个更小的且未出现的区间）
2. $I_{k}\cap I_{k+1}$为单元素集，但与前面的区间不为顺次排列. 此时有 $I_{k-1}\subseteq I_{k+1}$，同上可知 $I_{k+1}=I_{k-2}\cup I_{k-1}$，因此 $r^{k+1}=r^{k-2}+r^{k-1}$.

综上，$r^{2}-r-1=0$或 $r^{3}-r-1=0$.

1. r为 $x^{2}-x-1=0$的正根. 设 $a_{t+1}-a_{t}=r$，$a_{t+2}-a_{t+1}=r^{2}$，则 $a_{t+2}-a_{t}=r+r^{2}=r^{3}$. 若 $n\ge 4$，必有 $a_{t+3}=a_{t+2}+r^{4}$或 $a_{t-1}=a_{t}-r^{4}$.

   - 若为前者，则 $a_{t+3}-a_{t+1}=r^{4}+r^{2}=4r+3$不为 r的正整数次幂.
   - 若为后者，则 $a_{t+1}-a_{t-1}=r^{4}+r=4r+1$不为 r的正整数次幂.

   于是 $n\le 3$.
2. r为 $x^{3}-x-1=0$的正根. 设 $a_{t+1}-a_{t}=r$，$a_{t+2}-a_{t+1}=r^{2}$. 则 $I_{3}=[a_{t+1}-r^{3},a_{t+1}]$，或 $I_{3}=[a_{t+2},a_{t+2}+r^{3}]$.

   - 若为前者，则 $a_{t}-(a_{t+1}-r^{3})=r^{3}-r=2r+1$不为 r的正整数次幂.
   - 若为后者，则此时 $a_{t+2}-a_{t}=r^{2}+r=r^{4}$，$a_{t+3}-a_{t+1}=r^{3}+r^{2}=r^{5}$，$a_{t+3}-a_{t}=r^{3}+r^{4}=r^{6}$. 若 $n\ge 5$，则 $a_{t+4}=a_{t+3}+r^{7}$或 $a_{t-1}=a_{t}-r^{7}$. 同上可以证明矛盾.

   于是 $n\le 4$.

由此也能给出 $n=2,3,4$的构造：

1. $n=2$时，取 $r=a_{2}-a_{1}\in\mathbb{R}_{+}$；

2. $n=3$时，取 $r=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（$x^{2}-x-1=0$的正根），令 $a_{2}-a_{1}=r$，$a_{3}-a_{2}=r^{2}$.
3. $n=4$时，取 r为 $x^{3}-x-1=0$的正根，令 $a_{2}-a_{1}=r$，$a_{3}-a_{2}=r^{2}$，$a_{4}-a_{3}=r^{3}$，则 $a_{3}-a_{1}=r^{4}$，$a_{4}-a_{2}=r^{5}$，$a_{4}-a_{1}=r^{6}$.

于是满足题意的 n为 $2,3,4$.

解答（PDF 中已展开）

\ex \textbf{（2022年IMO预选题A5）}求所有的整数$n\ge 2$，使得存在正实数$a_{1}<a_{2}<\cdots<a_{n}$和正实数r，
↪ 满足$$\{a_{j}-a_{i}\mid 1\le i<j\le n\}=\{r,r^{2}\cdots,r^{n(n-1)/2}\}.$$
\begin{solution}对$1\le k\le \frac{n(n-1)}{2}$，设闭区间$I_{k}=[a_{i},a_{j}]$，其中$a_{j}-a_{i}=r^{k}$. 不妨设$r>1$，
↪ 否则用$a_{i}r^{-n(n-1)/2-1}$代替a_{i}，r^{-1}代替r，结论依然成立. \begin{anslemma}对$1\le k\le \frac{n(n-1)}{2}-1$，
↪ 都有$I_{k}\cap I_{k+1}\neq \varnothing$. \begin{proof}若不然，设$a_{p_{1}}<a_{p_{2}}<a_{q_{1}}<a_{q_{2}}$，
↪ 使得$$\{a_{p_{2}}-a_{p_{1}},a_{q_{2}}-a_{q_{1}}\}=\{r^{k},r^{k+1}\}.$$
不妨设$a_{p_{2}}-a_{p_{1}}=r^{k}$，$a_{q_{2}}-a_{q_{1}}=r^{k+1}$，否则可取$A>\max_{1\le i\le n} a_{i}$，
↪ 用$\{A-a_{i}\}$代替$\{a_{i}\}$，结论依然成立.
设$a_{q_{1}}-a_{p_{2}}=r^{\alpha}$，$a_{q_{1}}-a_{p_{1}}=r^{\beta}=r^{k}+r^{\alpha}$，
↪ 于是$$a_{q_{2}}-a_{p_{2}}=r^{k+1}+r^{\alpha}>r^{k}+r^{\alpha}=r^{\beta}$$$$a_{q_{2}}-a_{p_{2}}=r^{k+1}+r^{\alpha}<r^{k+1}」
↪ +r^{\alpha+1}=r^{\beta+1}$$而r^{β}和$r^{\beta+1}$之间不再有r的正整数次幂，矛盾！故引理1得证.
↪ \end{proof}\end{anslemma}在引理中，取$k=1$得$I_{1}\cap I_{2}\neq\varnothing$，而$I_{1}$区间长度是最短的，
↪ 故I_{1}的左右端点必为相邻的a_{i}，即$I_{1}=[a_{i},a_{i+1}]$. 若I_{2}的左右端点不相邻，
↪ 则I_{2}必有一个异于I_{1}的子区间I_{k}，矛盾！于是I_{1}和I_{2}恰有一个公共端点.
设k_{0}为满足如下要求的区间链$I_{1},I_{2},\cdots,I_{k}$的长度k的最大值：\begin{itemize}\item
↪ $I_{1},I_{2},\cdots,I_{k}$在数轴上按顺序排列；\item $I_{1}\cap I_{2},I_{2}\cap I_{3},\cdots,I_{k-1}\cap I_{k}$均为单元素集.
↪ \end{itemize}由于$I_{1}\cap I_{2}$为单元素集，因此k_{0}存在，且至少为2.
设$I_{j}=[b_{j},c_{j}]$，$1\le j\le k$. 容易知道不存在$b_{j}<d_{j}<c_{j}$，否则$[b_{j},d_{j}]$早于I_{j}出现.
↪ 即$I_{1},I_{2},\cdots,I_{k}$的左右端点均相邻.
考察 I_{k+1}，由上知，I_{k+1} 有两种情况：
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item $I_{k}\cap I_{k+1}$不为单元素集，而I_{k}的左右端点相邻，故$I_{k}\subseteq I_{k+1}$，
↪ 进一步地，有$I_{k+1}=I_{k}\cup I_{k-1}$，因此$r^{k+1}=r^{k}+r^{k-1}$. （否则能找到一个更小的且未出现的区间）\item
↪ $I_{k}\cap I_{k+1}$为单元素集，但与前面的区间不为顺次排列. 此时有$I_{k-1}\subseteq I_{k+1}$，
↪ 同上可知$I_{k+1}=I_{k-2}\cup I_{k-1}$，因此$r^{k+1}=r^{k-2}+r^{k-1}$. \end{enumerate}
综上，$r^{2}-r-1=0$ 或 $r^{3}-r-1=0$.
\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item r为$x^{2}-x-1=0$的正根. 设$a_{t+1}-a_{t}=r$，$a_{t+2}-a_{t+1}=r^{2}$，
↪ 则$a_{t+2}-a_{t}=r+r^{2}=r^{3}$. 若$n\ge 4$，必有$a_{t+3}=a_{t+2}+r^{4}$或$a_{t-1}=a_{t}-r^{4}$. \begin{itemize}\item
↪ 若为前者，则$a_{t+3}-a_{t+1}=r^{4}+r^{2}=4r+3$不为$r$的正整数次幂. \item 若为后者，
↪ 则$a_{t+1}-a_{t-1}=r^{4}+r=4r+1$不为$r$的正整数次幂. \end{itemize}于是$n\le 3$. \item r为$x^{3}-x-1=0$的正根.
↪ 设$a_{t+1}-a_{t}=r$，$a_{t+2}-a_{t+1}=r^{2}$. 则$I_{3}=[a_{t+1}-r^{3},a_{t+1}]$，或$I_{3}=[a_{t+2},a_{t+2}+r^{3}]$.
↪ \begin{itemize}\item 若为前者，则$a_{t}-(a_{t+1}-r^{3})=r^{3}-r=2r+1$不为$r$的正整数次幂. \item 若为后者，
↪ 则此时$a_{t+2}-a_{t}=r^{2}+r=r^{4}$，$a_{t+3}-a_{t+1}=r^{3}+r^{2}=r^{5}$，$a_{t+3}-a_{t}=r^{3}+r^{4}=r^{6}$.
若$n\ge 5$，则$a_{t+4}=a_{t+3}+r^{7}$或$a_{t-1}=a_{t}-r^{7}$. 同上可以证明矛盾. \end{itemize}于是$n\le 4$. \end{enumerate}
由此也能给出 $n=2,3,4$ 的构造：\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item $n=2$ 时，取 $r=a_{2}-a_{1}\in\mathbb{R}_{+}$；
\item $n=3$ 时，取 $r=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$（$x^{2}-x-1=0$ 的正根），令 $a_{2}-a_{1}=r$，$a_{3}-a_{2}=r^{2}$.
\item $n=4$时，取r为$x^{3}-x-1=0$的正根，令$a_{2}-a_{1}=r$，$a_{3}-a_{2}=r^{2}$，$a_{4}-a_{3}=r^{3}$，
↪ 则$a_{3}-a_{1}=r^{4}$，$a_{4}-a_{2}=r^{5}$，$a_{4}-a_{1}=r^{6}$. \end{enumerate}于是满足题意的n为$2,3,4$.
↪ \end{solution}