# 两道高联模拟卷中的离散不等式解答

2023-05-15　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9a9da3a255526c44

以下两题分别出自最近的爱尖子和猿辅导高联模拟，两题难度都不大，且风格相似，这里一起写个解答.

1. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 为整数，且满足 $\sum\limits_{k=1}^{10} ka_k = 2023$，求 $\sum\limits_{k=1}^{10} ka_k^2$ 的最小值.

**分析：**

主要在于猜取等条件.

由拉格朗日恒等式：

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{k=1}^{10} k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{10} ka_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{10} ka_k\right)^2\\=&\sum_{1\le i<j\le 10}\left(\sqrt{i}a_i\cdot\sqrt{j}-\sqrt{j}a_j\cdot\sqrt{i}\right)^2\\=&\sum_{1\le i<j\le 10} ij(a_i-a_j)^2\end{aligned}$$

故要使 $\sum\limits_{k=1}^{10} ka_k^2$ 尽可能小，需要 $\sum\limits_{1\le i<j\le 10} ij(a_i-a_j)^2$ 尽可能小.

首先考虑所有 $a_k$ 全部相等，均为 $a$，此时有 $55a = 2023$，与 $a$ 是整数矛盾.

其次考虑 $a_k$ 共有两种取值，且差为 0 或 1，由 $\left[\dfrac{2023}{55}\right] = 36$ 知 $a_k \in \{36, 37\}$.

**解答（PDF 中已展开）**

**答案：**

最小值为 74419.

**构造：**

$a_k \in \{36, 37\}$，且满足 $a_k = 37$ 所有下标 $k$ 之和为 12，如 $a_2 = a_{10} = 37$，$a_1 = a_3 = a_4 = \cdots = a_9 = 36$.

**证明：**

由 $a_k$ 为正整数知 $a_k \le 36$ 或 $a_k \ge 37$，于是 $(a_k - 36)(a_k - 37) \ge 0$，即 $a_k^2 \ge 73a_k - 1332$，因此

$$ka_k^2 \ge 73ka_k - 1332k$$

对 $k$ 从 1 到 10 求和得：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} ka_k^2 \geq & 73\sum_{k=1}^{10} ka_k - 1332\sum_{k=1}^{10} k\\ = & 73\times 2023 - 1332\times 55\\ = & 74419\end{aligned}$$

1. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{20} \in \mathbb{N}^*$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 2023$. 记

$$S_k = x_1x_{k+1} + x_2x_{k+2} + \cdots + x_{20}x_{k+20}.$$

若 $S_1 \geq S_2 \geq \cdots \geq S_9 \geq S_{10}$. 求 $S_9$ 的最小值与最大值.

**解答（PDF 中已展开）**

**分析：**

最小值和上题处理类似，最大值则需要注意到

$$S_0 + 2S_1 + \cdots + 2S_9 + S_{10} = \left(\sum_{k=1}^{20} x_k\right)^2$$

再利用 $S_1 \geq S_2 \geq \cdots \geq S_{10}$ 进行放缩.

(事实上，只需用到 $S_1, S_2, \cdots, S_8 \geq S_9$)

**答案：**

最小值为 4026，最大值为 204626.

**构造：**

当 $(x_1, x_2, \cdots, x_{20}) = (2004, 1, \cdots, 1)$ 或其轮换时，$S_9$ 取得最小值.

当 $(x_1, x_2, \cdots, x_{20}) = (102, 102, 102, 101, \cdots, 101)$ 或其轮换时，$S_9$ 取得最大值.

**证明：**

由 $(x_k - 1)(x_{k+9} - 1) \geq 0$ 知

$$x_kx_{k+9} \geq x_k + x_{k+9} - 1$$

对 $k$ 从 1 到 20 求和得：

$$S_9 = \sum_{k=1}^{20} x_kx_{k+9} \geq 2\sum_{k=1}^{20} x_k - 20 = 4026$$

由

$$\begin{aligned}&S_0+2S_1+2S_2+\cdots+2S_9+S_{10}\\=&\left(\sum_{k=1}^{20}x_k\right)^2=2023^2\end{aligned}$$

及 $S_1\geq S_2\geq\cdots\geq S_9$ 知:

$$\begin{aligned}&18S_9\leq 2(S_1+\cdots+S_9)\\=&2023^2-(S_0+S_{10})\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&S_0+S_{10}\\=&\sum_{k=1}^{20}x_k^2+\sum_{k=1}^{20}x_kx_{k+10}\\=&\sum_{k=1}^{20}x_k^2+2\sum_{k=1}^{10}x_kx_{k+10}\\=&\sum_{k=1}^{10}(x_k+x_{k+10})^2\\\geq&\frac{1}{10}\left(\sum_{k=1}^{10}(x_k+x_{k+10})\right)^2\\=&\frac{2023^2}{10}\end{aligned}$$

(注:此处也可以利用 $(x_k+x_{k+10}-202)(x_k+x_{k+1}-203)\geq 0$ 求和得到 $\sum\limits_{k=1}^{10}(x_k+x_{k+10})^2\geq 409255$,但我觉得本题直接用柯西放缩,再利用整数离散性更自然,不需要提前猜答案)

于是

$$S_9\leq\frac{2023^2-\dfrac{2023^2}{10}}{18}<204627$$

由 $S_9\in\mathbb{Z}$ 知,$S_9\leq 204626$.