2026 年德国数学奥林匹克

2026-06-13　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9ab904d1c051ee70

第一天

题 1. 求所有正整数 n，使得以下组合数均为奇数：

$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$.

题 2. 给定正整数 m, n 满足 $0 < m < n$. 考虑全体非负整数：初始时仅有 m 和 n 被染为红色，其余所有数均为白色. 我们按照以下规则逐步对数字进行染色操作，每一步流程如下：
(1) 统计当前红色数字的数量. 若红色数字不超过 1 个，则过程终止.
(2) 否则，记 k 为当前最小的红色数字，将数字 k 染为黑色.
(3) 随后考察 $k+m$ 与 $k+n$ 两个数：

- 若该数为红色，则将其染为黑色；
- 若该数为白色，则将其染为红色；
- 若该数已为黑色，则保持黑色不变.

证明：
(1) 无论 m, n 取何值，该过程必然在有限步内终止，且终止时恰好剩下一个红色数字 r.
(2) 终止时的唯一红色数字满足 $r \le 2^n - 1$.

题 3. 设 a, b, c 为一个三角形的三边长. 求最大的正整数 M，使得对任意满足条件的 a, b, c，都有 $\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{M}$.

第二天

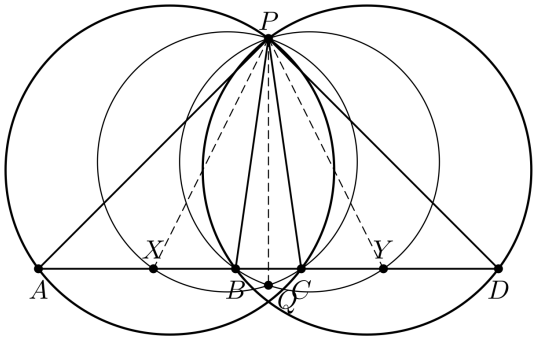
题 4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前两项 a_1, a_2 为整数，从第 3 项起，数列由如下递推公式定义：

$a_n = a_{n-1} + (-1)^{a_{n-1}} \cdot a_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$

求出所有能使该数列为最终周期数列的初值 a_1, a_2，并分别求出对应情形下的最小正周期.

题 5. 给定素数 p 与正整数 a，$p \nmid a - 1$. 令 $n = 1 + a^p + a^{2p} + \cdots + a^{(p-1)p}$. 求证：$n \mid a^n - a$.

题 6. 设圆 k 与圆 k' 相交，P 为两圆的其中一个交点. 作直线 g 平行于两圆的一条公切线，且位于远离点 P 的一侧. 直线 g 与圆 k 交于 A、C 两点，与圆 k' 交于 B、D 两点，且四点在直线 g 上按 A, B, C, D 的顺序排列. 记直线 g 与 $\angle APB$ 的角平分线的交点为 X，与 $\angle CPD$ 的角平分线的交点为 Y. 求证：$\triangle PXC$ 的外接圆、$\triangle PBY$ 的外接圆，以及 $\angle BPC$ 的角平分线，三者存在一个异于点 P 的公共点.



（本题配图为 AI 生成 tkz-euclide 代码）