单墫教授一道不等式的另证及推广

2021-10-22 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9adaf8e67bc9d69d

近段时间没怎么做题，今晚翻看各公众号的题目，发现单墫教授发的一道不等式难题：

设 a，b，$c>0$，$a+b+c=ab+bc+ca$. 求证：

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\geq 2+\sqrt{abc}.$$

不少老师给出了证明，见文末链接.

看到本题，我首先想到了 2019 年的巴尔干数学奥林匹克第 2 题，并以此为引理完成了证明.

以下为我的做法：

证明：若 a，b，c 均大于 1，则 $ab+bc+ca>a+b+c$，矛盾！故不妨设 $c\geq b\geq 1\geq a$.

先证明一个引理：（2019 年巴尔干数学奥林匹克）

实数 a，b，c 满足 $0\leq a\leq b\leq c$，且 $a+b+c=ab+bc+ca>0$. 则 $\sqrt{bc}(a+1)\geq 2$.

引理的证明：

同上可知 $a\leq 1$，则

$$bc=a+(1-a)(b+c)\geq a+2(1-a)\sqrt{bc}$$

记 $\sqrt{bc}=t$，则上式变为：

$$t^2-2(1-a)t-a\geq 0$$

这是一个关于 t 的二次不等式. 考虑二次方程

$$x^2-2(1-a)x-a=0$$

其两根一正一负，设正根为 t_1，则 $t\geq t_1$，待证式等价于 $t\geq \dfrac{2}{a+1}$，故只需证明：

$$\left(\frac{2}{a+1}\right)^2-2(1-a)\frac{2}{1+a}-a\leq 0$$

即证 $a^3-2a^2+a\geq 0$，显然成立.

回到原题.

因此有

$$\begin{aligned}&\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}-\sqrt{abc}\\=&\sqrt{bc}(1-\sqrt{a})+\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c})\\\geq&\frac{2(1-\sqrt{a})}{1+a}+2\sqrt{a\sqrt{bc}}\\\geq&\frac{2(1-\sqrt{a})}{1+a}+2\sqrt{\frac{2a}{1+a}}\end{aligned}$$

故只需证:

$$\frac{2(1-\sqrt{a})}{1+a}+2\sqrt{\frac{2a}{1+a}}\geq 1$$

即

$$\sqrt{\frac{2a}{1+a}}\geq\frac{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}{1+a}$$

也即

$$\sqrt{2(1+c)}\geq 1+\sqrt{c}$$

由柯西不等式显然成立.

最后给出此不等式的一个加强，欢迎读者交流:

设 a，b，$c>0$，$a+b+c=ab+bc+ca$，$k>0$. 求证:

$$(ab)^k+(bc)^k+(ca)^k-(abc)^k\geq\min(2,4^k).$$

其他老师的证法整理:

陈学辉——证明一道不等式难题.