从取石子问题到一个象棋残局

2021-05-08 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9aef86b275cd4b11

昨天做了一道取石子问题，比较有意思.

题目 1 有 4 堆石子，每一堆中的石子个数分别为 3、5、7、9. 二人轮流从中取石子，每人每次可以从某一堆中取任意枚石子（至少 1 枚），最后取完者为胜，谁有必胜策略?

解答（PDF 中已展开）

分析这种操作类问题的策略往往是考虑对称操作，即无论对方如何取石子，自己均可以作出与对方完全一样的操作. 为了达成这一目标，我们希望将这四堆石子两两分组，让同组内的石子个数相等. 简单尝试后发现，3、5、7、9 这一初始状态下，双方均没有办法达到这一目的.

既然无法实现整体的对称，我们着眼于局部. 很快联想到二进制的每一位只能为 0 或 1 两种状态，如果能让石子个数的二进制表示中，每一位上 1 的个数均为偶数，也就可以达到一样的效果. 我们称这是一个平衡状态.

3、5、7、9 的二进制表示如下（前面不足的位数用 0 补足）:

$$0\,0\,1\,1$$
$$0\,1\,0\,1$$
$$0\,1\,1\,1$$
$$1\,0\,0\,1$$

于是，先手第一次操作时，在最后一堆拿走 8 枚石子，使得四堆石子个数（二进制）分别为:

$$0\,0\,1\,1$$
$$0\,1\,0\,1$$
$$0\,1\,1\,1$$
$$0\,0\,0\,1$$

此时是一个平衡状态. 接下来，不论后手如何取走石子，总会将其变为一个非平衡状态，而一个非平衡状态经过某个操作后，也总可以变为平衡状态.（这里需要严谨证明.）而最终胜利状态 0、0、0、0 是一个平衡状态，所以先手有必胜策略.

为了解决更一般的情形，我们给出以下几个引理[1]:

先给出平衡数组的定义:

平衡数组对于一个 n 元正整数组 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$，其中每一个数 m_i 均能唯一地表示成 2 的不同次幂之和. 若任意 $2^s (s \in \mathbb{N})$ 均包含在偶数个 m 的展开式中，则称 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 为一

个平衡数组.

若存在某个 $2^s(s \in \mathbb{N})$ 包含在奇数个 m 的展开式中，则称 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ 为一个非平衡数组.

引理 1 $n > 1$，对于任意 $n-1$ 个数 m_1，m_2，$\cdots$，m_{n-1}，均存在唯一的正整数 p，使 $(m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}, p)$ 为平衡数组.

引理 2 将平衡数组中的任意一个数 m_i 变为 $m_i'(m_i' < m_i)$，其余数不变，则此数组变为非平衡数组.

引理 3 对于非平衡数组 $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$，存在某个 $m_i' < m_i$，将数组中的 m_i 变为 m_i'，其余数不变，该数组变为平衡数组.

以上三个引理的证明都比较简单，熟悉二进制的同学可以很快得出，故在此略去.

于是我们得到了如下一般性结论：

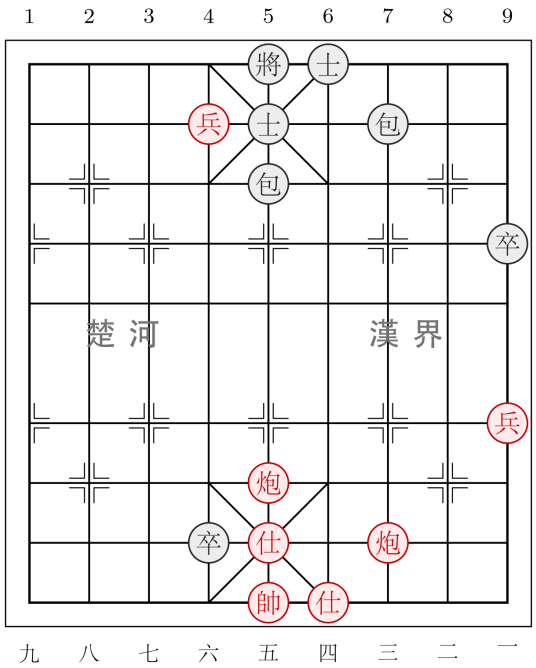
对于任意 n 堆石子，进行一样规则的游戏（二人轮流从中取石子，每人每次可以从某一堆中取任意枚石子（至少 1 枚），最后取完者为胜）. 谁有必胜策略依赖于初始状态是否是一个平衡数组.

如果初始状态为一个非平衡数组（如题目 1），则先手一定可以经过恰当的操作使之变成一个平衡数组，因此先手有必胜策略.

如果初始状态为一个平衡数组，例如三堆石子个数依次为 3、13、14，则不论先手如何操作，均会得到一个非平衡数组，而后手总能将其再次变为平衡数组，因此后手有必胜策略.

事实上，这就是**尼姆博弈**的推广.

最后来看一个象棋残局（转自 B 站 up 主：--根号 13--）：



容易发现，过河兵卒不宜再走动，否则等于给对方“松了绑”．其次，双方炮都只能在各自的路线上进退，不能平动．而且，河沿上的兵卒只有一方可以进一步．除此之外，没有任何着法．于是问题的关键是：双方谁能走到最后一步棋？这样分析之后，就不难用本文的方法来预测此残局的胜负，并且指出取胜的办法了．

参考资料

[1]

尼姆博弈的推广：《中学数学教学》1990 年第 6 期