Mathematical Reflections 2023 年第一期征解题

2023-01-17 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9b14e2b04408060c

Junior Problems

J613. 求所有整数 $n \geq 2$，使得 $n-1$ 和 n^2+1 均能整除 n^4+2039.

J614. 正实数 a，b，c 满足 $abc=1$. 求证：

$$\frac{a}{\sqrt{1+b^2c+bc^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+c^2a+ca^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+a^2b+ab^2}} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$$

J615. 在任意 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{m_b m_c}{(m_b+m_c)^2} \leq \frac{2a^2+bc}{8a^2+(b+c)^2}$$

J616. 正实数 a，b，c 满足 $a+b+c=3$. 求证：

$$\frac{a(b+c)^2}{a+3}+\frac{b(c+a)^2}{b+3}+\frac{c(a+b)^2}{c+3} \leq 3$$

J617. 求证：$\triangle ABC$ 为等边三角形当且仅当

$2\left(a^2\cos A+b^2\cos B+c^2\cos C\right) \geq \sqrt{3\left(a^4+b^4+c^4\right)}$

J618. 在 $\triangle ABC$ 中，w_a、w_b、w_c 分别为三条角平分线的长度. 求证：

$w_a\left(bc-a^2\right)+w_b\left(ca-b^2\right)+w_c\left(ab-c^2\right) \geq 0$

Senior Problems

S613. 解方程：

$$2(\sin x+\cos x)+\sec x+\csc x=4\sqrt{2}$$

S614. 正实数 a，b，c 满足

$$(a+b)(b+c)(c+a)=9abc$$

求证：

$$\sqrt[3]{2abc} \leq \max(a,b,c) \leq \sqrt[3]{4abc}$$

S615. 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq\frac{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}-\frac{2r}{R}$$

S616. $\triangle ABC$ 的重心为 G. 射线 AG 和边 BC 以及 $\triangle ABC$ 的外接圆分别交于点 A_1、A_2. 类似定义点 B_1、B_2 和 C_1、C_2. 求证:

(1)$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}$

(2)$\dfrac{A_1A_2}{AA_2+2A_1A_2}+\dfrac{B_1B_2}{BB_2+2B_1B_2}+\dfrac{C_1C_2}{CC_2+2C_1C_2}=\dfrac{1}{2}$

S617. 已知 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{2023}$. 求 $f(x^5)f(x^9)$ 的展开式 x^{2023} 的系数.

S618. 正实数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$. 求证:

$$\frac{1}{abc}+\frac{4\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{9+4\sqrt{2}}{ab+bc+ca}$$

Undergraduate Problems

U613. 求证: 存在无穷多个实系数多项式 $P(x)$, 使得对任意满足 $x^2+y^2+z^2=xyz+4$ 的实数 x, y, z, 都有

$P(x)^2+P(y)^2+P(z)^2+2P(x)P(y)P(z)=1$

U614. 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 为正实数. 考虑无穷级数

$$S_1=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{a_k\left(\ln\left(\ln a_k\right)\right)^r}$$

和

$$S_2=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{a_k(\ln(\ln k))^s}$$

其中 $s\geq r>0$ 为实数. 求证: 若 S_1 收敛, 则 S_2 收敛.

U615. 计算:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\sin(\cos x))-1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$$

U616. 设 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为连续函数, 且对任意 $x\in\mathbb{R}$, 都有

$$f(f(f(x)))+f(f(x))-f(x)-x=0$$

求证: 任意 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $f(f(x))=x$.

U617. 斐波那契数列和卢卡斯数列定义如下: $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $F_0=0$, $F_1=1$; $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$, $L_0=2$, $L_1=1$. 计算:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{F_1}{F_{2n}}\right)\left(1+\frac{F_2}{F_{2n}}\right)\cdots\left(1+\frac{F_n}{F_{2n}}\right)\right]^{L_n}$$

U618. 设 d 为正整数，$n=\binom{d}{2}$. z_1，$\cdots$，z_d 为单位复数. 对任意整数 $1\le i<j\le d$，考虑实数 $x=|z_i-z_j|^2$，将这些实数按照某种顺序排列成数列 x_1，x_2，$\cdots$，x_n. 求证：

$$\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\le\frac{d^4-3d^2}{2}$$

Olympiad Problems

O613. 求不定方程

$$x^3-7xy+y^3=2023$$

的整数解.

O614. 正实数 a，b，c，d 满足

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}=1$$

求证：

$$abc+bcd+cda+dab+36\ge 12(a+b+c+d)$$

O615. 正实数 a，b，c 满足 $a+b+c=3$. 求证：

$$abc\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)\le 3$$

O616. 正实数 a，b，c 满足 $a+b+c=3$. 求证：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)-(ab+bc+ca)$$

O617. 设 $a<b<c<d$ 为正整数. 求证：

$$\gcd(a!+1,b!+1,c!+1,d!+1)<d^{\frac{d-a}{3}}$$

O618. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形. 求证：

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-\frac{3}{2}\ge k\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{8}\right)$$ 其中 $k=4\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2$. 并说明等号何时称.