用调整法证明 2022 年 CGMO 第 8 题

2022-08-14 原文链接

网站版本 3f6bf801342b · 文章 ID h_9b39b4dc0a168215

前言：写完后发现和 AoPS 上已有的一个解答非常相似，就不标原创了。

2022 年中国女子数学奥林匹克第八题如下：

> 设 x_1，x_2，$\cdots$，x_{11} 是非负实数，且总和等于 1．对 $i=1$，2，$\cdots$，11，记
>
> $$y_i=\begin{cases}x_i+x_{i+1}, & \text{若}i\text{是奇数}\\ x_i+x_{i+1}+x_{i+2}, & \text{若}i\text{是偶数}\end{cases}$$
>
> 这里 $x_{12}=x_1$．记 $F(x_1,x_2,\cdots,x_{11})=y_1y_2\cdots y_{11}$．
>
> 证明：当 F 取得最大值时，一定有 $x_6<x_8$．

首先写出 F 的具体表达式：

$$F=(x_1+x_2)(x_2+x_3+x_4)(x_3+x_4)(x_4+x_5+x_6)$$
$$(x_5+x_6)(x_6+x_7+x_8)(x_7+x_8)(x_8+x_9+x_{10})(x_9+x_{10})(x_{10}+x_{11}+x_1)(x_{11}+x_1)$$

观察其中各个未知数的分布规律，可以发现 x_3 只以 x_3+x_4 的形式出现，x_5 只以 x_5+x_6 的形式出现，x_7 只以 x_7+x_8 的形式出现，x_9 只以 x_9+x_{10} 的形式出现，x_{11} 只以 $x_{11}+x_1$ 的形式出现．

故用

$$(x_{11}+x_1,x_2,0,x_3+x_4,0,x_5+x_6,0,x_7+x_8,0,x_9+x_{10},0)$$

代替 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11})$，$F$ 不减．当 $F>0$ 且被清零的五个变量中至少一个为正时，至少一个正因子严格增大，故 F 严格增大．又最大值为正，所以在任何最大值点必有 $x_3=x_5=x_7=x_9=x_{11}=0$．

而上述过程等价于令 $x_3=x_5=x_7=x_9=x_{11}=0$，并令 $x_1'=x_{11}+x_1$，$x_4'=x_3+x_4$，$x_6'=x_5+x_6$，$x_8'=x_7+x_8$，$x_{10}'=x_9+x_{10}$．（为方便书写，我们仍用 x_1，x_4，x_6，x_8，x_{10}）

于是题目变为：

> 非负实数 x_1，x_2，x_4，x_6，x_8，x_{10} 和为 1，求
>
> $$F=(x_1+x_2)(x_2+x_4)x_4(x_4+x_6)x_6(x_6+x_8)x_8(x_8+x_{10})x_{10}(x_{10}+x_1)x_1$$
>
> 的最大值．

继续找出现次数最少的项，发现是 x_2，故对 x_2 进行调整．x_2 和 x_1，x_4 有关，所以将 x_2 调整到 x_1 和 x_4，考虑包含这三项的部分：

$$G(x_1,x_2,x_4)=(x_1+x_2)(x_2+x_4)x_4(x_4+x_6)(x_{10}+x_1)x_1$$

我们证明：

$$G(x_1+\frac{x_2}{2},0,x_4+\frac{x_2}{2})\geq G(x_1,x_2,x_4)$$

只需分别证明：

$$(x_1+\frac{x_2}{2})^2(x_1+\frac{x_2}{2}+x_{10})\geq x_1(x_1+x_2)(x_1+x_{10})$$

$$(x_4+\frac{x_2}{2})^2(x_4+\frac{x_2}{2}+x_6)\geq x_4(x_4+x_2)(x_4+x_6)$$

展开后显然成立.

当 $x_2>0$ 且 $F>0$ 时，上述调整严格增大 F，所以在任何最大值点都有 $x_2=0$.

故只需求

$F=x_1^2x_4^2(x_4+x_6)x_6(x_6+x_8)x_8(x_8+x_{10})x_{10}(x_{10}+x_1)$ 的最大值.

同时交换 x_1 与 x_4、x_6 与 x_{10}，上式不变. 令 $a=(x_1+x_4)/2$，$b=(x_6+x_{10})/2$，$c=x_8$. 由均值不等式，

$$x_1^2x_4^2\leq a^4,\quad x_6x_{10}\leq b^2,\quad (x_4+x_6)(x_{10}+x_1)\leq (a+b)^2,$$

$$(x_6+c)(x_{10}+c)\leq (b+c)^2.$$

故同时将这两对变量分别换为其平均值，F 不减；在正的最大值点，等号条件给出 $x_1=x_4$、$x_6=x_{10}$.

我们设 $x_1=x_4=a$，$x_6=x_{10}=b$，$x_8=c$. 问题变为：

已知非负实数 a，b，c 满足 $2a+2b+c=1$，求证：

$F=a^4b^2c(a+b)^2(b+c)^2$ 取最大值时，$b<c$.

用待定系数法凑配系数：

$$F=a^4b^2c(a+b)^2(b+c)^2=\frac{1}{\lambda_1^4\lambda_2^2\lambda_3\lambda_4^2\lambda_5^2}(\lambda_1a)^4(\lambda_2b)^2(\lambda_3c)(\lambda_4(a+b))^2(\lambda_5(b+c))^2$$

$$\leq\frac{1}{\lambda_1^4\lambda_2^2\lambda_3\lambda_4^2\lambda_5^2}\left(\frac{4\lambda_1a+2\lambda_2b+\lambda_3c+2\lambda_4(a+b)+2\lambda_5(b+c)}{11}\right)^{11}$$

选取正系数 λ_i 使线性和为常数，再要求均值不等式取等号，即令

$$\begin{cases}\lambda_1a=\lambda_2b=\lambda_3c=\lambda_4(a+b)=\lambda_5(b+c)=t\\ 4\lambda_1+2\lambda_4=2\lambda_2+2\lambda_4+2\lambda_5=2(\lambda_3+2\lambda_5)\end{cases}$$

于是

$$\frac{2t}{a}+\frac{t}{a+b}=\frac{t}{b}+\frac{t}{a+b}+\frac{t}{b+c}=\frac{t}{c}+\frac{2t}{b+c}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b+c}\\ \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b+c}\end{cases}$$

从中消去 a，得到

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{\dfrac{2}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b+c}}+b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b+c}\iff\frac{6b+4c}{4b^2+3bc}=\frac{b+2c}{bc+c^2}$$

$$\iff 4b^3+5b^2c-4bc^2-4c^3=0$$

设 $k=\frac{b}{c}$，则 $4k^3+5k^2-4k-4=0$.

设 $f(x)=4x^3+5x^2-4x-4$，则 $f'(x)=12x^2+10x-4$，故 $f(k)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{73}-5}{12}\right)$ 递减，在 $\left(\frac{\sqrt{73}-5}{12},+\infty\right)$ 递增. 且 $f(0)=-4<0$，$f(1)=1>0$，于是 $f(x)=0$ 有唯一正实根 k，且 $k\in(0,1)$，即 $\frac{b}{c}<1$，也即 $b<c$，证毕.