一分钟做不等式系列（6）——2025 年土耳其 EGMO 选拔考试

2025-02-09　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9bad7155a5c5e8ca

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

23 (2025 年土耳其 EGMO 选拔考试). 是否存在无穷正实数列 $\{a_n\}$，使得对任意正整数 n，都有 $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq n^2$，且 $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq n^3 + 2025n$.

解 假设存在这样的数列 $\{a_n\}$，由 Cauchy 不等式，

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq n(n^3+2025n) < (n^2+1013)^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

于是对任意正整数 k，$a_k = \sum_{j=1}^{k} a_j - \sum_{j=1}^{k-1} a_j \geq k^2 - (k-1)^2 - 1013 = 2k - 1014$.

因此，对 $n > 507$，

$$n^3 + 2025n \geq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq \sum_{k=1}^{n} (2k-1014)^2 > \sum_{k=1}^{n-507} (2k)^2 = 4 \cdot \frac{(n-507)(n-506)(2n-1013)}{6}$$

左右均为关于 n 的三次多项式，且左侧最高次项系数为 1，右侧最高次项系数为 $\frac{4}{3}$，当 n 充分大时，不等式不成立. 于是不存在这样的数列.

做这种带年份的题目，过程中总会写很多次自己的生日，一种奇怪的熟悉感……