2023 年波兰数学奥林匹克决赛（初级组）

2023-05-06 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9bf3e8f0cf201b47

1.是否存在实数 x, y, z，使得

$$x+\frac{1}{y}=z, \quad y+\frac{1}{z}=x, \quad z+\frac{1}{x}=y.$$

2.正整数 a, b 满足 $a>b>1$，且 b 是 a 除自身外最大的约数．求证：$a+b$ 不是 2 的正整数次幂．

3.给定三角形 ABC，其中 $AC<BC$，$\angle ACB=60^\circ$．点 D 在线段 AC 上，且 D 异于 A，满足 $AB=BD$；点 E 在线段 BC 上，且 E 异于 B，满足 $AB=AE$．求证：$\angle DEC=30^\circ$．

4.n 为正奇数，将 n 个箭头从左到右依次排列，每个箭头指向左边或右边．求证：存在一个箭头，其指向的箭头个数与指向其的箭头个数相同．
注：例如，$n=5$ 时，在排列 $\rightarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow\rightarrow$ 中，每个箭头所指向的箭头个数依次为 $4, 3, 2, 3, 0$.

5.求所有正整数 m, n，使得 $\underbrace{33\ldots3}_{m}\underbrace{66\ldots6}_{n}$ 是完全平方数．

1.是否存在实数 x,y,z，使得 $$x+\frac{1}{y}=z,\quad y+\frac{1}{z}=x,\quad z+\frac{1}{x}=y.$$

2.正整数 a,b满足 $a>b>1$，且 b是 a除自身外最大的约数．求证：$a+b$不是 2的正整数次幂．

3.给定三角形 ABC，其中 $AC<BC$，$\angle ACB=60^{\circ}$．点 D在线段 AC上，且 D异于 A，满足 $AB=BD$；点 E在线段 BC上，且 E异于 B，满足 $AB=AE$．求证：$\angle DEC=30^{\circ}$．

4.n为正奇数，将 n个箭头从左到右依次排列，每个箭头指向左边或右边．求证：存在一个箭头，其指向的箭头个数与指向其的箭头个数相同．
注：例如，$n=5$时，在排列 $\rightarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow\rightarrow$中，每个

箭头所指向的箭头个数依次为 $4,3,2,3,0.$

5.求所有正整数 m,n，使得 $\underbrace{33\ldots3}_{m}\underbrace{66\ldots 6}_{n}$是完全平方数.

解答（PDF 中已展开）

```
\documentclass{ctexart}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{enumitem}
\usepackage{geometry}
\usepackage{setspace}
\geometry{a6paper,left=1cm,right=1cm,top=0.5cm,bottom=0.8cm}
\usepackage{hyperref}
\begin{document}
\begin{spacing}{1.2}
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3066520p27669852}{\bf 1.}是否存在实数$x,y,z$，
↪ 使得$$x+\frac{1}{y}=z,\quad y+\frac{1}{z}=x,\quad z+\frac{1}{x}=y.$$
\vfill
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3066528p27669911}{\bf 2.}正整数$a,b$满足$a>b>1$，
↪ 且$b$是$a$除自身外最大的约数. 求证：$a+b$不是$2$的正整数次幂.
\vfill
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3066522p27669862}{\bf 3.}给定三角形$ABC$，其中$AC<BC$，
↪ $\angle ACB=60^{\circ}$. 点$D$在线段$AC$上，且$D$异于$A$，满足$AB=BD$；点$E$在线段$BC$上，且$E$异于$B$，
↪ 满足$AB=AE$. 求证：$\angle DEC=30^{\circ}$.
\vfill
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3066524p27669880}{\bf 4.}$n$为正奇数，
↪ 将$n$个箭头从左到右依次排列，每个箭头指向左边或右边. 求证：存在一个箭头，
↪ 其指向的箭头个数与指向其的箭头个数相同. \\
注：例如，$n=5$时，在排列$\rightarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow\rightarrow$中，
↪ 每个箭头所指向的箭头个数依次为$4,3,2,3,0.$
\vfill
\noindent\href{https://artofproblemsolving.com/community/c6h3066526p27669889}{\bf 5.}求所有正整数$m,n$，
↪ 使得$\underbrace{33\ldots3}_{m}\underbrace{66\ldots 6}_{n}$是完全平方数.
\vfill
\end{spacing}
\end{document}
```