16 道用数学归纳法证明的不等式

2021-12-13 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9bfc76c7cfb62be5

1. 用数学归纳法证明下列不等式：

- （柯西不等式）设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是两个实数列，则

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2.$$

- （权方和不等式）

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

- （闵科夫斯基不等式）

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}.$$

- （平方平均不等式）

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

- （琴生不等式）假设 $f(x)$ 时定义在 $[a, b] \in \mathbb{R}$ 上的凸函数，实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a, b]$，对所有非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$，则有

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n) \geq f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n).$$

（推论）若对于某种平均运算 M （算术，几何，调和等），当 $n = 2$ 时有 $M(f(x), f(y)) \geq f(M(x, y))$，则对一般的 n，有

$$M(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)) \geq f(M(x_1, x_2, \cdots, x_n)).$$

1. **(1992 年 APMO)** 令 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个数列，对于所有的 i, j，满足 $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ 证明：对于每个正整数 n，有

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n.$$

2. **(1988 年 CMO)** 在有限项的实数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中，如果有一段数 $a_k, \cdots, a_{k+l-1}$ 的算术平均数大于 1988，那么我们把这段数叫做一条“龙”，并把 a_k 称为这条龙的“龙头”（如果某一项 $a_m > 1988$，那么单独这一项也是龙）. 假定数列中至少存在一条龙，证明：数列中全体可以作为龙头的项的算术平均数也必定大于 1988.

3. **(2006 年 CMO)** 实数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = -a_k + \frac{1}{2 - a_k}, k = 1, 2, \cdots$$

证明不等式：

$$\left(\frac{n}{2(a_1+a_2+\cdots+a_n)}-1\right)^n \le \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-1\right).$$

1. **(2009 年 CTST)** 给定整数 $n \ge 2$，求具有下述性质的最大常数 $\lambda(n)$：若实数序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$0 = a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_n, \quad a_i \ge \frac{1}{2}(a_{i+1}+a_{i-1}),\ i = 1, 2, \cdots, n-1,$$

则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i a_i\right)^2 \ge \lambda(n) \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

2. **(2013 年 CTST)** 设整数 $n \ge 2$，$a_1, a_2, \cdots, a_n$，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是非负实数. 证明：

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \ge \prod_{i=1}^{n}\left(a_i^2+b_i^2\right)^{\frac{1}{n}}.$$

3. 设 $x_k > 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$，求证：

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1+x_k}{x_k} \ge \prod_{k=1}^{n} \frac{n-x_k}{1-x_k}.$$

4. 证明对任何正整数 N，$\sqrt{2\sqrt{3\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}} < 3$.

5. (牛顿不等式) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为非负实数. S_k 表示第 k 个初等对称多项式，$d_k = \frac{S_k}{\binom{n}{k}}$，则

$$d_{k-1} d_{k+1} \le d_k^2.$$

6. 设 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n a_{n-1} + 1}{a_{n-1}}$, $n = 2, 3, \cdots$. 证明：对任意正整数 $n \ge 3$，都有 $a_n > \sqrt{2n}$.

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0 = a_1 = 1$，$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2} + \frac{n}{2}} (n \ge 2)$. 证明：存在实数 λ，使得对任意的正整数 n，有 $\lambda n < a_n < \lambda n + 1$.

8. 设 $a > 0$, 证明: 对任意正整数 n, 有

$$\frac{1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}}{a+a^3+a^5+\cdots+a^{2n-1}} \ge \frac{n+1}{n}.$$

1. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0, 1), n \ge 2$, 证明:

$$\frac{\sqrt{1-x_1}}{x_1} + \frac{\sqrt{1-x_2}}{x_2} + \cdots + \frac{\sqrt{1-x_n}}{x_n} < \frac{\sqrt{n-1}}{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为非负实数, 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n}\geq\sqrt{a_1+4a_2+9a_3+\cdots+n^2a_n}.$$

1. 已知正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$, 证明:

$$\left(\sqrt{2}+x_1\right)\left(\sqrt{2}+x_2\right)\cdots\left(\sqrt{2}+x_n\right)\geq(\sqrt{2}+1)^n.$$

1. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数, 且满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=n$, 证明:

$$a_1a_2\cdots a_n\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-n+3\right)\leq 3.$$