2022 年国际大学生数学竞赛（IMC）

2022-08-22　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9c0c22bfb62a71eb

第一天

1. 设 $f\colon [0,1]\to(0,+\infty)$ 是一个可积函数，且满足对任意 $x\in[0,1]$，都有 $f(x)f(1-x)=1$. 求证：$\int_0^1 f(x)dx\geq 1$.

2. 对给定的正整数 n，求所有具有唯一实特征值的 $n\times n$ 实矩阵 A，使得存在整数 $k\geq n$，满足 $A+A^k=A^T$.

3. 设 p 为质数. 起初，已知跳蚤停留在数轴原点，每一分钟，跳蚤有三种选择：停留在原地，向左或向右跳动一个单位. 记 $f(p)$ 为跳蚤在 $p-1$ 秒后回到原点的方法数.（例如，$f(3)=3$，因为跳蚤可以一直停留在原点，也可以先向左后向右，或者先向右后向左.）求 $f(p)$ 模 p 的余数.

4. 整数 $n>3$. 设 Ω 为所有 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中三个不同元素构成的三元有序组组成的集合. 将 Ω 中每个三元有序组染色，使得对任意 $1\leq a<b<c<d<e\leq n$，(a,b,c) 和 (b,c,d) 被染成不同颜色，记 m 为满足要求所需的最少颜色数. 求证：$\dfrac{1}{100}\log\log n\leq m\leq 100\log\log n$.

第二天

1. 将正 43 边形的每条边和对角线染成红、蓝二色之一，使得每个顶点都是 20 条红线和 22 条蓝线的端点. 如果一个三角形的三条边颜色相同，则称为单色三角形. 若存在 2022 个蓝色单色三角形，问有多少个红色单色三角形?

2. 设素数 $p\leq 3$. 求证：存在 $(1,2,\cdots,p-1)$ 的一个排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_{p-1})$，使得 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{p-2}x_{p-1}\equiv 2\pmod p$.

3. 设 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 均为 $n\times n$ 的幂等复矩阵，且满足对任意 $1\leq i<j\leq k$，都有 $A_iA_j=-A_jA_i$. 求证：其中至少有一个矩阵的秩不超过 $\dfrac{n}{k}$.

4. 设整数 n，$k\geq 3$，S 为一个圆. 在圆上均匀且独立地随机选取 n 个位置放置蓝色点，选择 k 个位置放置红色点. 用 F 表示红色点的凸包和蓝色点的凸包的交集. 设 m 为凸多边形 F 的边数（特别地，若 F 为空集，则 $m=0$）. 求 m 的数学期望.