我把高联一试出卷流程做成了一个 Skill

2026-08-30　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9ccbb5c181ab6f04

这一个月，我一直在折腾一个很具体的东西：让一套出卷流程按高联一试的结构，自己完成候选题生成、解答、筛选、校验、排版，最后给出可以打印的试卷和参考答案。

最早的想法很简单。高联一试的结构固定，8 道填空、3 道解答，80 分钟、120 分。如果把题材、难度、解答格式和排版要求都写清楚，应该能跑出一套像样的模拟卷。

做了几轮之后，坑很快就出来了。

11 道题凑齐不难。难的是题位要对，Q6 不能突然比 Q5 简单很多，Q9 ~ Q11 不能只是题面长；参考解答也不能在最该展开的地方留一句“分类可得”。再往后还有原创性检查、PDF 排版、逐页检查，以及一个很现实的问题：流程会不会自己写出一堆 PASS，然后把没做好的东西放过去。

现在这套 Skill 做到 R5.2。我把它当成一个半成品，离稳定使用还有距离。

先把当前版本跑出来的一套卷子放出来。它是一次真实输出，也正好保留了目前还没解决干净的问题。

先看试卷

2026年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨2026年全国高中数学联合竞赛
一试模拟试题（A卷 · 第4套）

考试时间：80 分钟　　满分：120 分

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设集合

$$A=\{n\in\mathbb{Z}:-3\le n\le 8\},\qquad B=\{n\in A:6\mid n(n-1)\}\subset A.$$

则集合 $A\setminus B$ 中所有元素之和为 _____.

2. 复数 z 满足 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$、$|z+1|=2$，且 $\operatorname{Im}z>0$，则 $|z|=$ _____.

3. 在单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 内等可能地任取一点 (x,y)。若

$$x+2y\le 1,\qquad 2x+y\le 1,\qquad x+y\ge\frac{1}{2},$$

则该事件的概率为 _____.

4. 若方程

$$|x^2-4|+|x|=a$$

有六个不同的实根，则实数 a 的取值范围为 _____.

5. 正数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=2$，且

$$a_na_{n+2}=a_{n+1}^2+1\qquad(n\ge 1).$$

则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=$ _____.

6. 在三角形 ABC 中，满足

$$\sin A+\sin B=\frac{3}{2}\sin C,\qquad \cos A+\cos B=\frac{1}{2}.$$

则 $\cos(A-B)=$ _____.

7. 独立掷三颗公平的六面骰子，所得点数依次为 a,b,c。若要求 $a+b+c$ 为偶数，且 $\gcd(a,b,c)=1$，则该事件的概率为 _____.

8. 将 $1,2,\dots,8$ 排成一列，并把 8 与 1 也视为一对循环相邻整数。若在八对

$$\{1,2\},\{2,3\},\dots,\{7,8\},\{8,1\}$$

中，恰有三对在排列中的位置相邻，则这样的排列共有 _____个.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上有两个不同的点 A, B。两点处的切线交于 P，两点处的法线交于 Q，F 为抛物线的焦点。证明

$$PQ^2 = QF^2 + 3PF^2.$$

10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，PA, PB, PC 两两垂直。设 H 为点 P 到平面 ABC 的垂足，R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径。证明

$$PH^2 + 4R^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2.$$

11. 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 为正实数，下标按模 5 循环，即 $x_{i+5} = x_i$。若

$$x_i x_{i+1} = x_{i+2} + x_{i+3} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

证明 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$。

«< 左右滑动见更多 »>

这套卷子采用高联一试常见结构：前 8 题填空，后 3 题解答。当前版本已经能把题目、分值结构和正式排版一次生成出来。

再看参考答案与评分标准

2026年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）
暨2026年全国高中数学联合竞赛
一试模拟试题（A卷 · 第4套）
参考答案及评分标准

说明：填空题每题 8 分，答对得 8 分，否则得 0 分；解答题按评分节点累计给分.

一、填空题参考答案

1. 设集合

$$A=\{n\in\mathbb{Z}:-3\le n\le 8\},\qquad B=\{n\in A:6\mid n(n-1)\}\subset A.$$

则集合 $A\setminus B$ 中所有元素之和为 _____.

答案：14.

解：由于相邻两个整数的乘积必为偶数，条件 $6\mid n(n-1)$ 等价于 $3\mid n(n-1)$，即 $n\equiv 0$ 或 $1\pmod 3$。因此 $A\setminus B$ 中恰为 $n\equiv 2\pmod 3$ 的元素，即 $-1,2,5,8$，其和为 14。

2. 复数 z 满足 $|z-1|=|z-\mathrm{i}|$、$|z+1|=2$，且 $\operatorname{Im}z>0$，则 $|z|=$ _____.

答案：$\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$.

解：设 $z=x+yi$。由 $|z-1|=|z-i|$ 得 $x=y$。再由 $|z+1|=2$ 得 $(x+1)^2+x^2=4$，即 $2x^2+2x-3=0$。因 $\operatorname{Im}z=x>0$，故 $x=(\sqrt{7}-1)/2$。于是 $|z|=\sqrt{2}x=(\sqrt{14}-\sqrt{2})/2$。

3. 在单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 内等可能地任取一点 (x,y)。若

$$x+2y\le 1,\qquad 2x+y\le 1,\qquad x+y\ge\frac{1}{2},$$

则该事件的概率为 _____.

答案：$\dfrac{1}{24}$.

解：三个不等式在第一象限的公共部分是三角形。直线 $x+y=1/2$ 分别与 $x+2y=1$、$2x+y=1$ 交于 $(0,1/2)$、$(1/2,0)$，而前两条直线交于 $(1/3,1/3)$。故所求区域面积为

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ 1/3 & -1/6\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{24}.$$

单位正方形面积为 1，故概率为 $1/24$。

4. 若方程

$$|x^2-4|+|x|=a$$

有六个不同的实根，则实数 a 的取值范围为 _____.

答案：$\left(4,\dfrac{17}{4}\right)$.

解：令 $t=|x|\ge 0$。当 $0\le t\le 2$ 时，$|t^2-4|+t=4-t^2+t=17/4-(t-1/2)^2$；当 $t\ge 2$ 时，该式为 t^2+t-4，严格递增。要有六个不同实根，恰需出现三个不同的正数 t。这等价于第一段水平线有两个正交点且第二段有一个交点，即 $4<a<17/4$。端点 $a=4,17/4$ 都会发生根的合并，故范围为 $(4,17/4)$。

5. 正数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=2$，且

$$a_n a_{n+2}=a_{n+1}^2+1 \qquad (n\geq 1).$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}=$ _____.

答案：$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解：由 $a_n a_{n+2}=a_{n+1}^2+1$，考察

$$I_n=\frac{a_n^2+a_{n+1}^2+1}{a_n a_{n+1}}=\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}.$$

同理利用 $a_{n+1}a_{n+3}=a_{n+2}^2+1$ 可验证 $I_{n+1}=I_n$，故 $I_n=I_1=3$，于是

$$a_{n+2}+a_n=3a_{n+1}.$$

另一方面，原递推式给出

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

故前 N 项和为 $a_{N+2}/a_{N+1}-2$。线性递推的特征根为 $(3\pm\sqrt{5})/2$，且各项为正，故 $a_{N+2}/a_{N+1}\to(3+\sqrt{5})/2$。所求级数为 $(\sqrt{5}-1)/2$。

6. 在三角形 ABC 中，满足

$$\sin A+\sin B=\frac{3}{2}\sin C, \qquad \cos A+\cos B=\frac{1}{2}.$$

则 $\cos(A-B)=$ _____.

答案：$-\dfrac{1}{4}$.

解：令 $S=\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi-C}{2}$，$D=\dfrac{A-B}{2}$。由和差化积，

$$2\cos\frac{C}{2}\cos D=\frac{3}{2}\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2},$$

故 $\cos D=\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{C}{2}$。又

$$2\sin\frac{C}{2}\cos D=\frac{1}{2}.$$

代入前式得 $3\sin^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}$，于是

$$\cos^2 D=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{8}.$$

因此

$$\cos(A-B)=\cos 2D=2\cos^2 D-1=-\frac{1}{4}.$$

7. 独立掷三颗公平的六面骰子，所得点数依次为 a,b,c。若要求 $a+b+c$ 为偶数，且 $\gcd(a,b,c)=1$，则该事件的概率为 _____.

答案：$\dfrac{13}{36}$.

解：三数之和为偶数共有 108 个有序结果。现从中扣去最大公因数大于 1 的情形。若三数全为偶数，有 $3^3=27$ 种；若三数都被 3 整除，则每个数为 3 或 6，其中三数和为偶数要求出现 3 的个数为偶数，共 $\binom{3}{0}+\binom{3}{2}=4$ 种；公因数含 5 时只能为 $(5,5,5)$，其和为奇数，不计。全为偶数且全被 3 整除只有 $(6,6,6)$ 一种，需在容斥中加回。因此合格结果数为 $108-(27+4-1)=78$，概率为 $78/216=13/36$。

8. 将 $1,2,\dots,8$ 排成一列，并把 8 与 1 也视为一对循环相邻整数。若在八对

$$\{1,2\},\{2,3\},\dots,\{7,8\},\{8,1\}$$

中，恰有三对在排列中的位置相邻，则这样的排列共有 _____个.

答案：8816.

解：记八个循环相邻事件为 $E_1,\dots,E_8$。对任意 $j<8$，若指定 j 条循环边必须相邻，并且这些边在八边形上分成 c 个连通段，则每一段只能按正向或反向排成一个块，因此同时发生这些 j 个事件的排列数为 $2^c(8-j)!$。令 A_j 为所有 j 个事件交集大小之和。按所选循环边的连通段数分类，可得

$$A_3=32640,\quad A_4=9216,\quad A_5=1632,\quad A_6=192,\quad A_7=16,$$

而 $A_8=0$（一列不可能同时实现八条循环邻接边）。若 N_k 表示恰有 k 个事件发生的排列数，则

$$A_j=\sum_{k\ge j}\binom{k}{j}N_k.$$

由二项反演，

$$N_3=\sum_{j=3}^{8}(-1)^{j-3}\binom{j}{3}A_j=32640-4\cdot 9216+10\cdot 1632-20\cdot 192+35\cdot 16=8816.$$

故答案为 8816。

二、解答题参考答案及评分标准

9. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上有两个不同的点 A, B。两点处的切线交于 P，两点处的法线交于 Q，F 为抛物线的焦点。证明

$$PQ^2 = QF^2 + 3PF^2.$$

解：设 $A = (u^2, 2u)$，$B = (v^2, 2v)$，其中 $u \neq v$。抛物线在参数为 t 的点处的切线与法线分别为

$$ty = x + t^2, \qquad y = -tx + 2t + t^3.$$

……4 分

记 $p = u + v$，$q = uv$。联立两条切线，得

$$P = (q, p).$$

这是因为 $(u - v)y = u^2 - v^2$，故 $y = p$，再代回得 $x = q$。

……8 分

联立两条法线，约去 $u - v$ 后得到

$$x_Q = 2 + u^2 + uv + v^2 = 2 + p^2 - q,$$

进而

$$y_Q = -uv(u + v) = -pq.$$

故 $Q = (2 + p^2 - q, -pq)$。焦点为 $F = (1, 0)$，记

$$\Delta = p^2 + (q - 1)^2 = PF^2.$$

……12 分

直接整理三段距离可得

$$QF^2 = (1 + p^2 - q)^2 + p^2q^2 = (p^2 + 1)\Delta,$$

以及

$$PQ^2 = (p^2 + 2 - 2q)^2 + p^2(q + 1)^2 = (p^2 + 4)\Delta.$$

因此

$$PQ^2 - QF^2 = 3\Delta = 3PF^2,$$

即 $\boxed{PQ^2 = QF^2 + 3PF^2}$。

……16 分

4

10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，PA, PB, PC 两两垂直。设 H 为点 P 到平面 ABC 的垂足，R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径。证明

$$PH^2 + 4R^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2.$$

解：记 $PA = a, PB = b, PC = c$。取 P 为原点，并以 PA, PB, PC 所在直线为三个坐标轴，则

$$A = (a, 0, 0), \quad B = (0, b, 0), \quad C = (0, 0, c).$$

平面 ABC 的截距式为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

故

$$PH^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

……5 分

又

$$AB^2 = a^2 + b^2, \qquad BC^2 = b^2 + c^2, \qquad CA^2 = c^2 + a^2.$$

并且

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \qquad \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c),$$

所以

$$4[ABC]^2 = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

……10 分

由三角形外接圆半径公式

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4[ABC]},$$

可得

$$4R^2 = \frac{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

……15 分

利用恒等式

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^2b^2c^2,$$

代入上式并与 PH^2 相加，含 $a^2b^2c^2$ 的两项恰好抵消，于是

$$PH^2 + 4R^2 = a^2 + b^2 + c^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2.$$

命题得证。

……20 分

5

11. 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 为正实数，下标按模 5 循环，即 $x_{i+5} = x_i$。若

$$x_i x_{i+1} = x_{i+2} + x_{i+3} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

证明 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2$。

解：把下标均按模 5 理解。将第 $i+1$ 个等式从第 i 个等式中相减，得

$$x_{i+1}(x_i - x_{i+2}) = x_{i+2} - x_{i+4}.$$

令 $d_i = x_{i+2} - x_i$，则

$$d_{i+2} = x_{i+1} d_i.$$

……5 分

沿着下标每次增加 2 连续使用五次上式。由于 2 与 5 互素，五步恰好遍历全部下标，因此

$$d_i = (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) d_i.$$

记 $P = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$。若某个 $d_i \neq 0$，则必有 $P = 1$。

……10 分

另一方面，把五个原等式相乘，得到

$$P^2 = \prod_{i=1}^{5} (x_i + x_{i+1}).$$

由算术–几何平均不等式，

$$\prod_{i=1}^{5} (x_i + x_{i+1}) \geq 2^5 \sqrt{\prod_{i=1}^{5} x_i x_{i+1}} = 32P.$$

因 $P > 0$，所以 $P \geq 32$，与 $P = 1$ 矛盾。故所有 d_i 都等于 0。

……15 分

于是 $x_{i+2} = x_i$ 对每个 i 都成立。仍因 2 与 5 互素，可知五个数全部相等，设其公共值为 $t > 0$。代回任一原等式得

$$t^2 = 2t,$$

所以 $t = 2$。因此

$$\boxed{x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2}.$$

……20 分

6

«< 左右滑动见更多 »>

这份解析里，填空题给出答案和过程，解答题按评分节点排版。形式已经比较接近我想要的样子，内容质量还需要继续打磨。

这套样卷现在有什么问题

我暂时不会把上面这套卷子当成“成品示范”。

它刚好把几个问题暴露得很清楚。

第 9 题和第 10 题偏简单。两题模块不同，一个是解析几何，一个是立体几何，但实际做起来都比较接近“建系或参数化—套公式—整理恒等式”。放到 16 分、20 分的位置，思考量还不够。

第 8 题的答案没有问题，不过参考解答在最重要的分类计数处写了“按连通段数分类，可得……”，随后直接列出一组数字。对一份正式解析来说，这里应该继续展开，让学生能看清这些数到底怎么数出来。

我还发现一个更麻烦的问题：早期版本会把“求一个交点、算一个距离、整理一个式子”记成三

个独立难点。这样一来，一道很顺的题也可能被评到很高的位置。候选题数量看起来很多，也不代表里面真的有足够强的 Q10、Q11。

这些问题现在都被当作回归样本留在系统里。下一次再遇到相同类型，程序会优先把它拦下来。

这个 Skill 现在怎么出一套卷子

这里说的 Skill，可以理解成一套可以重复运行的出卷工程。里面有规则，也有实际执行的校验脚本。

一轮出卷会先产生不少于 16 个构思，再选 13 ~ 14 个做完整解答。这个阶段不给它们贴 Q1、Q9、Q11 的标签，只编号 C01、C02……先看题本身。

候选题随后会经历一次匿名审题。审题时重新找最短解，看看入口是不是太熟，找到入口以后会不会一路机械计算，能不能很容易改成填空题。

等这一轮结束，才开始给题目分位置。

现在我还给候选池加了一个比较硬的要求：准备选 Q10、Q11 之前，池子里必须先有足够数量的高位候选。池里没有，就继续补题。不能从一堆中档题里挑两道最难的，然后把题号改成 Q10、Q11。

最后三道题会再被“压缩”一次

Q9 ~ Q11 写完正式参考解答以后，还要重新检查一次。

这一步不看前面的自评，只看最终题面和最终解答。

比如一题最后只剩下：

建系、点面距离、外接圆公式、恒等式整理。

程序会把它识别成一条比较标准的公式路线，并限制它能进入的题位。类似的短路线会一点点积累成回归库。

我现在更愿意用这种方式调难度。已经发现的简单题，下一版不要再犯。新类型继续靠真实样卷去暴露。

题材不同还不够

早期我主要限制 Q9、Q10、Q11 的题材不能重复。

实际跑起来以后发现，题材标签有时候很会骗人。

解析几何可以是坐标计算，立体几何也可以是坐标计算。题目表面分别写着抛物线和三棱锥，学生做题时却在重复同一种工作。

R5.2 开始检查三道尾题的大致解法路线。题材、入口、后续动作都要尽量拉开。

这个部分目前还比较粗，需要继续靠老师和学生的实测来校准。

参考答案也要过检查

参考答案现在单独有一组检查。

我比较在意两种情况。

一种是关键计数直接给数字。比如前面的第 8 题，最需要展开的地方正是那组分类计数，解析里就应该交代清楚。

另一种是高分解答题在最后写一句“直接整理可得”。如果这一步占了很大的实际工作量，解析应该展开。

对学生来说，题目只是一次训练；解析决定这次训练最后能留下多少东西。这部分我会继续往教学可读性方向调。

原创性检查也还在试

目前每道题会从题面、结构和解法三个方向做公开检索。

这里踩过一个很典型的坑：三个查询全部搜不到结果，看上去很安全，但也有可能只是关键词写得太窄。

现在遇到三类查询都为 0 的情况，会自动换成更概括的数学机制继续搜。

如果搜到相近题，也不能只看数字、初值、最后问法有没有变化。数学机制很接近时，仍然要提高风险等级。

这套机制只能降低明显撞题的概率。我现在不会给任何一道题写“绝对原创”这样的结论。

PDF 也有自己的检查流程

题目通过前面的检查后，会生成 TeX、试题 PDF 和解析 PDF。

PDF 会逐页导出成图片，再做一次页面检查。现在每一页的检查记录都会和那一页图片的 SHA-256 绑定。

这么做是为了避免一个很容易忽略的问题：检查完版本 A，最后发布时又重新编译出版本 B。R5.2 里，逐页检查完成以后不会再重新编译。

最终发布前，还会从原始候选题、盲审记录、最终题面和解答重新跑一遍主要校验。以前生成出来的 PASS 文件只能作为记录，最后还得再算一次。

目前就是一个半成品

R5.2 还处在调试和开发阶段，目前适合拿来测试、挑错、收集样本，不适合把每次生成的结果直接当作正式训练材料。

尤其是难度。高联一试的题位感很依赖长期做题和教学经验，仅靠程序规则很难一次调准。

我现在最缺的也正是这部分真实反馈。

有些题在生成阶段看起来很漂亮，学生一做几分钟就结束了；有些题程序觉得步骤不多，实际课堂上却卡住一大片。这样的反馈比再加十条抽象规则有用得多。

想找一批老师、学生和家长一起测试

接下来准备建一个小范围测试群。

群里会放测试版本、样卷和更新记录，也会收集错题、坏题、排版问题和功能建议。

欢迎感兴趣的朋友进群。

群聊：高联一试模拟卷 Skill 内测群



该二维码 7 天内 (9月6日前) 有效，重新进入将更新

后面准备怎么做

短期先把几件事继续做扎实：解答题的难度、参考答案的完整度、原创检索，以及每次坏样卷的回归测试。

我也会继续把实际失败保留下来。

哪一类题被老师认为偏简单，哪一类题学生实测很快，哪一种解析经常跳步，就把它变成下一版的测试用例。

等流程稳定一些，校验规则和样例库也整理清楚之后，我会把这套 Skill 和配套脚本开源。

到时候希望它能成为一个可以继续修改、继续补规则的公开工程，大家也可以拿自己的坏题去测

试它。

现在先从一个半成品开始。

欢迎进群，帮我挑错。