15 道数学竞赛中的方程（组）问题

2021-12-11 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9d7fc6d88bcb8ccc

1. **（2006 年加拿大数学奥林匹克）**解方程组：

$$v_i = 1 + \frac{6v_i^2}{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{10}^2} (1 \le i \le 10).$$

2. **（2016 年 ELMO）**求所有的正整数 n，使得存在 $2n$ 个不全相同的实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_{2n}，满足其中任意 n 个之和等于另 n 个之积.

3. **（2021 年美国数学奥林匹克）**设整数 $n \ge 4$，求如下方程组的正实数解：

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{a_2}, & a_2 &= a_1 + a_3, \\
a_3 &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}, & a_4 &= a_3 + a_5, \\
a_5 &= \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6}, & a_6 &= a_5 + a_7 \\
&\vdots & &\vdots \\
a_{2n-1} &= \frac{1}{a_{2n-2}} + \frac{1}{a_{2n}}, & a_{2n} &= a_{2n-1} + a_1
\end{aligned}$$

1. **（2006 年美国数学奥林匹克）**求所有的实数 $x, y, z \ge 1$，满足

$$\min\{\sqrt{x+xyz}, \sqrt{y+xyz}, \sqrt{z+xyz}\} = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

1. **（2019 年欧洲女子数学奥林匹克）**求满足下述条件的所有三元有序实数组 (a, b, c)：

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b, ab + bc + ca = 1.$$

1. **（2009 年亚太地区数学奥林匹克）**设实数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 满足，对 $k = 1, 2, 3, 4, 5$，

$$\frac{a_1}{k^2+1} + \frac{a_2}{k^2+2} + \frac{a_3}{k^2+3} + \frac{a_4}{k^2+4} + \frac{a_5}{k^2+5} = \frac{1}{k^2}.$$

求 $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$ 的值.

2. **（2006 年中国西部数学奥林匹克）**求满足下述条件的最小正实数 k：对任意不小于 k 的 4 个互不相同的实数 a，b，c，d，都存在 a，b，c，d 的一个排列 p，q，r，s，使得方程 $(x^2 + px + q)(x^2 + rx + s) = 0$ 有 4 个互不相同的实根.

3. **（2005 年中国女子数学奥林匹克）**解方程组：

$$\begin{cases} 5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13\left(z+\dfrac{1}{z}\right) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$$

1. **(2006 年全国高中数学联赛)** 解方程组：

$$\begin{cases} x-y+z=w=2 \\ x^2-y^2+z^2-w^2=6 \\ x^3-y^3+z^3-w^3=20 \\ x^4-y^4+z^4-w^4=66 \end{cases}$$

1. **(根源杯模拟题 15)** 实数范围内求解方程组：

$$\begin{cases} 1-x_1^2=x_2 \\ 1-x_2^2=x_3 \\ \cdots \\ 1-x_{2n-1}^2=x_{2n} \\ 1-x_{2n}^2=x_1 \end{cases}$$

1. 正整数 $n\geq 2$，互不相等的非零实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足：

$$a_1+\frac{1}{a_2}=a_2+\frac{1}{a_3}=\cdots=a_n+\frac{1}{a_1}=t$$

求实数 t 的值.

2. **(2020 年越南数学奥林匹克)** 以 a 为参数的方程组：

$$\begin{cases} x-ay=yz \\ y-az=zx \\ z-ax=xy \end{cases} (x,y,z\in\mathbb{R}).$$

- 当 $a=0$ 时，解这个方程组；
- 证明：当 $a>1$ 时该方程组有 5 组解.

1. **(2021 年百子 S9)** 求所有的正整数 n，使得方程组

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^n+y^n+z^n=3 \end{cases} (x,y,z\in\mathbb{C})$$

只有唯一解 $x=y=z=1$.

1. **(1995 年土耳其国家队选拔)** 给定实数 $b \geq a > 0$，在复数范围内解方程组：

$$\begin{cases} x_1^2 + 2ax_1 + b^2 = x_2, \\ x_2^2 + 2ax_2 + b^2 = x_3, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ x_n^2 + 2ax_n + b^2 = x_1. \end{cases}$$

1. **(1979 年国际数学奥林匹克)** 求所有满足条件的实数 a，使得存在非负实数 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 满足关系：$\sum\limits_{k=1}^{5} kx_k = a$，$\sum\limits_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2$，$\sum\limits_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3$.