2019 年联赛 A 卷数论题的一个自然证法

2025-09-08 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9ea26e1d6e5463d5

题目：

设 m 为整数，$|m| \geq 2$. 整数数列 $\{a_n\}$ 满足：a_1, a_2 不全为零，且对任意正整数 n，均有 $a_{n+2} = a_{n+1} - ma_n$. 求证：若存在整数 r, s（$r > s \geq 2$）使得 $a_r = a_s = a_1$，则 $r - s \geq |m|$.

解答（PDF 中已展开）

分析：

本题常规方法为模 m，比较简单. 这里写一个从数列通项角度考虑的方法，个人觉得也非常自然.

证明：

由递推公式可设 $a_n = A \cdot \alpha^{n-1} + B \cdot \beta^{n-1}$（次数设成 $n-1$ 是为了使后面出现的 a_1 形式简洁），其中 α, β 为 $x^2 = x - m$ 的两根，即 $\alpha + \beta = 1$，$\alpha\beta = m$.

由 $a_r = a_s = a_1$ 知

$A \cdot \alpha^{r-1} + B \cdot \beta^{r-1} = A \cdot \alpha^{s-1} + B \cdot \beta^{s-1} = A + B$

视为关于 A, B 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\alpha^{r-1} - 1)A + (\beta^{r-1} - 1)B = 0 \\ (\alpha^{s-1} - 1)A + (\beta^{s-1} - 1)B = 0 \end{cases}$$

由 a_1, a_2 不全为零知 A, B 不全为零，于是此方程组的系数行列式为零，即

$(\alpha^{r-1} - 1)(\beta^{s-1} - 1) = (\alpha^{s-1} - 1)(\beta^{r-1} - 1)$

也即

$(\alpha\beta)^{s-1}(\alpha^{r-s} - \beta^{r-s}) + (\alpha^{s-1} - \beta^{s-1}) - (\alpha^{r-1} - \beta^{r-1}) = 0$

构造数列 $\{b_n\}$：$b_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$，其满足

$b_0 = 0, b_1 = 1, b_{n+2} = b_{n+1} - mb_n.$

于是 $m^{s-1} \cdot b_{r-s} + b_{s-1} - b_{r-1} = 0$ $(*)$.

（至此，完成了对题目条件的“翻译”，将信息不明确的数列 $\{a_n\}$ 转化成了固定的数列 $\{b_n\}$）

将 b_n 往后写几项：

$b_2 = 1, b_3 = 1 - m, b_4 = 1 - 2m, b_5 = 1 - 3m + m^2$

容易归纳证明：$n \geq 2$ 时，

$b_n \equiv 1 - (n-2)m \pmod{m^2}$.

（1）$s \geq 3$ 时，将 $(*)$ 两边模 m^2 得：

$0 + 1 - (s-3)m \equiv 1 - (r-3)m \pmod{m^2}$

即 $m^2 \mid (r-s)m$，也即 $m \mid r - s$，证毕.

(2) $s=2$ 时，(*) 变为 $mb_{r-2}+1-b_{r-1}=0$.

(i)$r\geq 4$ 时，两边模 m^2 得：

$m(1-(r-4)m)+1-(1-(r-3)m)\equiv 0 \pmod{m^2}$

即 $m^2\mid (r-2)m$，也即 $m\mid r-2=r-s$.

(ii)$r=3$ 时，(*) 变为 $mb_1+1-b_2=0$，即 $m=0$，矛盾.

综上，结论成立.