2024 年北大金秋营第 2 题不等式的证明

2024-10-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_9fe036a32214723f

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

17 (2024 年北大金秋营第 2 题). 设实数 $a>b>c$，求证：

$$\left|\frac{(a-b)(b-c)(1-ab-bc-ca)}{(a-c)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\right|\leq\frac{1}{4}.$$

证明 去分母，平方，只需证明：

$$(a-c)^2(1+a^2)^2(1+b^2)^2(1+c^2)^2\geq 16(a-b)^2(b-c)^2(1-ab-bc-ca)^2.$$

由

$$(a-c)^4=(a-b+b-c)^4\geq(4(a-b)(b-c))^2=16(a-b)^2(b-c)^2,$$

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\geq(1+a^2)(1+c^2)=(1+ac)^2+(a-c)^2\geq(a-c)^2,$$

$$\begin{aligned}(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)=&(1-ab-bc-ca)^2+(a+b+c-abc)^2\\ \geq&(1-ab-bc-ca)^2,\end{aligned}$$

三式相乘即证.

17

简单的问题，熟悉最后那个恒等式就很好做了（用复数的模长易证）. 不过都 4202 年了还在考三元不等式，难以评价…